

Grundwissen Mathematik 10. Klasse

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
Kapitel 1: Exponentielles Wachstum und Logarithmus		
Wachstumsprozesse:		
Lineares Wachstum Wachstumsfunktion: $f(x) = mx + t$ Wachstum $m = f(x + 1) - f(x)$ Y-Achsenabschnitt t ($\triangleq$ Schnittpunkt mit der y-Achse)	Exponentielle Wachstum Wachstumsfunktion: $f(x) = b \cdot a^x$ Wachstumsfaktor $a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ Startwert b ($\triangleq$ Schnittpunkt mit der y-Achse)	
Exponentialfunktion: Die Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = b \cdot a^x$ nennt man Exponentialfunktion. Eigenschaften: - Der Graph schneidet nicht die x-Achse (d. h. die x-Achse ist waagrechte Asymptote) - Der Graph steigt für $a > 1$ und $b > 0$ bzw. für $0 < a < 1$ und $b < 0$.		
Exponentialgleichungen und Logarithmus Die Exponentialgleichung $a^x = b$ hat genau eine Lösung, die man als Logarithmus von b zur Basis a bezeichnet. Man schreibt: $x = \log_a b$ Beispiel: $\log_3 81 = 4$, weil $3^4 = 81$ Rechenregeln: $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$ und $\lg u = \log u = \log_{10} u$	1. Ordne das passende Wachstumsverhalten zu und gib eine Wachstumsfunktion an. a) 5000€ werden mit 3% pro Jahr angelegt. b) Ein leeres Schwimmbecken wird befüllt mit 600l pro Minute. c) Von der Menge 10g eines radioaktiven Stoffes zerfallen stündlich 8,5%. 2. Skizziere die folgenden Funktionsgraphen: a) $f(x) = 2 \cdot 0,8^x$ b) $g(x) = 2x + 1,5$ c) $h(x) = -0,5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$ 3. Löse die Exponentialgleichungen. a) $5 \cdot 4^x + 6 = 17$ b) $3^x \cdot 6 \cdot 2^{-x} = 120$ c) $2000 = 5 \cdot 2^{2t-1}$ 4. Die Gleichung $m(t) = 200mg \cdot 2,5^{-0,4t}$ beschreibt den Abbau eines Medikaments im Körper in Stunden. Ermittle, wann etwa die Hälfte des Medikaments abgebaut ist.	1. a) Exponentielles Wachstum, $f(x) = 5000 \cdot 1,03^x$ b) Lineares Wachstum $f(x) = 600 \cdot x$ c) Exponentielles Wachstum, $f(x) = 10 \cdot 0,915^x$ 2. Lsg: 3. a) $x = \log_4 2,2 \approx 0,57$ b) $x = \log_{1,5} 20 \approx 7,39$ c) $t = \frac{\log_2 400+1}{2} \approx 4,82$ 4. $100mg = 200mg \cdot 2,5^{-0,4t}$ $t = \log_{2,5} 0,5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \approx 1,89$ Nach knapp 1h 54min ist die Hälfte abgebaut.
Kapitel 2: Mehrstufige Zufallsexperimente und stochastische Simulationen		
Mehrstufige Zufallsexperimente und Pfadregeln: Zufallsexperimente, bei denen man mehrere Teilexperimente unabhängig nacheinander durchgeführt werden, heißen <u>mehrstufig</u>. - 1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ereignis gehört - 2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.	1. Du ziehst aus einem Stapel aus 20 gut gemischten Karten (4 Farben) nacheinander zweimal ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Herzkarten gezogen werden. 2. Es werden fünf Würfel gleichzeitig geworfen. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass ... a) ... genau eine 6 erscheint. b) ... mindestens eine 6 erscheint.	1. $P(\text{zwei Herz}) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = 5,26\%$ 2. a) $P(\text{eine 6}) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} \approx 40,2\%$ b) $P(\geq \text{eine 6}) = 1 - P(\text{keine 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776} \approx 59,8\%$

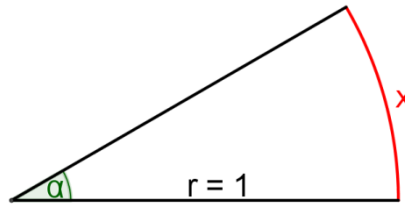
Kapitel 3: Sinus- und Kosinusfunktion

Bogenmaß

Die Größe eines Winkels eines α kann man im **Gradmaß** angeben oder im **Bogenmaß** mithilfe der Bogenlänge x am Einheitskreis. Es gilt:

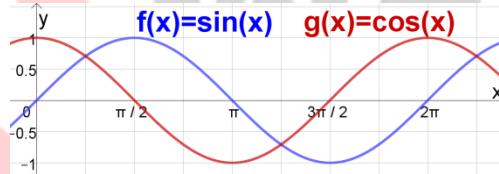
$$x = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi \text{ bzw. } \alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Beispiel: $\alpha = 180^\circ \rightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \pi$ (Was auch Sinn macht, denn die Bogenlänge eines Halbkreises mit Radius 1 hat die Länge π)



Sinus- und Kosinusfunktion

Die Funktionen mit der Funktionsgleichung ...



... $f(x) = \sin(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) heißt **Sinusfunktion**.

... $g(x) = \cos(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) heißt **Kosinusfunktion**.

Die Funktionen sind periodisch mit der Periodenlänge 2π .

Allgemeine Sinusfunktion

Graphen von **Sinusfunktionen der Form** $h(x) = a \cdot \sin[b(x+c)] + d$ ergeben sich aus der Sinusfunktion nach folgendem Muster:

- **Streckung in y-Richtung** mit dem Faktor $|a|$, d. h. Amplitude a
- **Streckung in x-Richtung** mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$, d. h. Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$
- **Verschiebung in y-Richtung** um d
- **Verschiebung in x-Richtung** um $-c$

Beispiel: $f(x) = 1,5 \cdot \sin\left[2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1$

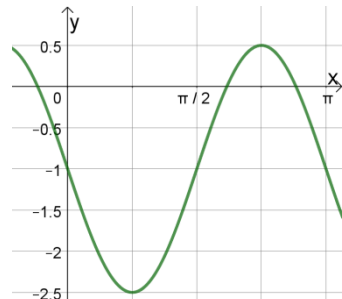
Amplitude 1,5

Periodenlänge $p = \pi$

Verschiebung in y-Richtung um 1 nach unten

Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts

Funktionsgraph für $x \in [0; \pi]$



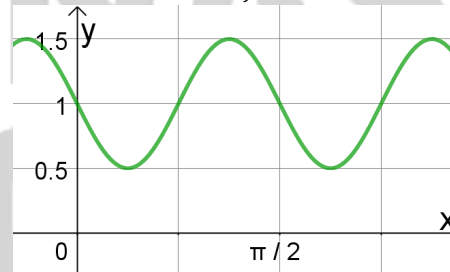
1. Rechne ins Grad- bzw. Bogenmaß um.

- $x = \frac{5}{4}\pi$
- $\alpha = 200^\circ$
- $x = -\frac{8\pi}{3}$

2. Bestimme alle reellen Zahlen $x \in [0; 2\pi]$ für die gilt:

- $\sin(x) = 0$
- $\cos(x) = -0,5$
- $\sin(x) = 0,7$

3. Bestimme einen Funktionsterm zum abgebildeten Graphen g_f .



4. Die Wassertiefe bei der Einfahrt in einen Hafen variiert infolge der Gezeiten. Die Funktion f mit $f(t) = 1,6 \sin\left[\frac{2\pi}{12,4}(t + 3,1)\right] + 3,6$ beschreibt die Wassertiefe in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden seit 0 Uhr.

- Gib die Periodenlänge p an und interpretiere p im Sachzusammenhang.
- Begründe, dass die Wassertiefe für $t = 0$ maximal ist.
- Ermittle, wann die Wassertiefe minimal ist.

1. a) $\alpha = 225^\circ$

b) $x = \frac{10}{9}\pi$

c) $\alpha = -480^\circ$

2. a) $x_1 = 0; x_2 = \pi; x_3 = 2\pi$

b) $x_1 = \frac{2}{3}\pi; x_2 = \frac{4}{3}\pi$

c) $x_1 \approx 0,78; x_2 = \pi - x_1 \approx 2,37$

3. Mögliche Lösung:

Amplitude 0,5

Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$

Verschiebung in y-Richtung um 1 nach oben

Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts

$$f(x) = 0,5 \cdot \sin\left[4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1$$

Alternativ:

$$f(x) = 0,5 \cdot \sin(4x) + 1$$

4. a) $p = 12,4$. Nach 12,4h sind die Gezeiten einmal durchlaufen.

b) $f(0) = 5,2$

Das ist der maximale Wert, denn die Amplitude ist 1,6 und der Graph ist 3,6 nach oben verschoben.

c) Die Wassertiefe ist nach der halben Periodenlänge minimal, also für $t = 6,2$, d. h. nach 6h und 12min, also um 6:12 Uhr.

Kapitel 4: Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ heißt **ganzrationale Funktion**.

Eigenschaften ganzrationaler Funktionen:

- Die höchste vorkommende Potenz gibt den **Grad der Funktion** an.
- Das Verhalten des Graphen an den Nullstellen hängt von der **Vielfachheit der Nullstelle** ab:
 - Ungerade Vielfachheit $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel (VZW)
 - Gerade Vielfachheit $\rightarrow$ Kein Vorzeichenwechsel
- Der **charakteristische Verlauf** der Funktionsgraphen im Unendlichen wird durch den Summanden $a_n x^n$ bestimmt. Dabei gilt:
 - n gerade und $a_n > 0$: „Von links oben nach rechts oben“
 - n gerade und $a_n < 0$: „Von links unten nach rechts unten“
 - n ungerade und $a_n > 0$: „Von links unten nach rechts oben“
 - n ungerade und $a_n < 0$: „Von links oben nach rechts unten“
- **Symmetrie**
 - Achsensymmetrie zur y-Achse $\leftrightarrow f(x) = f(-x)$
 - Punktsymmetrie zum Ursprung $\leftrightarrow -f(x) = f(-x)$

Substitution

Bei ganzrationalen Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2 + a_0$ kann man die Nullstellen mithilfe einer Substitution bestimmen. Man substituiert $z = x^2$ und erhält $f(z) = a_4 z^2 + a_2 z + a_0$.

Mit der Lösungsformel $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ erhält man z_1 und z_2 .

Zuletzt muss wieder rücksubstituiert werden: $x_{1,2} = \pm \sqrt{z}$.

Beispiel: $f(x) = 2x^4 - x^2 - 1$

Nullstellen: $f(z) = 2z^2 - z - 1 \rightarrow z_1 = 1 \rightarrow x_1 = 1$ und $x_2 = -1$; $z_2 = -0,5$ liefert keine weiteren Nullstellen

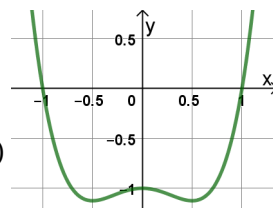
Zwei einfache Nullstellen bei ± 1 , d.h. mit VZW

Schnittpunkt y-Achse: $f(0) = -1 \rightarrow S_y(0 | -1)$

Grobverlauf: „Von links oben nach rechts oben“

Symmetrie: $f(-x) = 2 \cdot (-x)^4 - (-x)^2 - 1 = f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse



1. Bestimme das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm \infty$.

- a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$
- b) $f(x) = -x^2 \cdot (x - 3)$
- c) $f(x) = 0,5 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$

2. Berechne die Nullstellen der Funktion f und gib deren Vielfachheit an.

- a) $f(x) = x^2 \cdot (x - 4)$
- b) $g(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
- c) $h(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 1)$

3. Untersuche die Funktionen auf Symmetrie.

- a) $f(x) = -2x^6 + 4x^2 - 6$
- b) $g(x) = x^7 - 2x^3 + 5x$

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25(x - 0,5)(x^2 - 4)(x - 2)$.

- a) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
- b) Bestimme den charakteristischen Verlauf des Funktionsgraphen im Unendlichen.
- c) Skizziere den Funktionsgraphen.

5. Die Gewinnfunktion eines Unternehmens lässt sich durch $g(x) = 4,5x - 0,01(x^3 - 4x^2 - 75x)$ modellieren [x: Anzahl verkaufter Packungen in 100 Stück; g(x): Gewinn in 100€]

- a) Bestimme die Nullstellen und interpretiere diese im Sachzusammenhang.
- b) Erläutere, ob das Unternehmen einen Absatz von 30000 Packungen anstreben sollte.

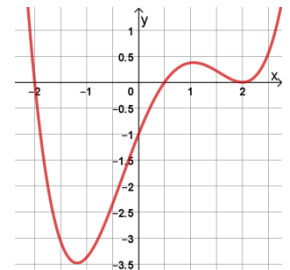
1.

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow \infty$
a)	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
b)	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
c)	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$

- a) $x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_2 = 4$ (einfache Nullstelle)
- b) $x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$ (alle einfach)
- c) $x_1 = 1$ (dreifache Nullstelle); $x_2 = -1$ (einfache Nullstelle)

- a) $f(x) = f(-x)$
Achsensymmetrie
- b) $f(-x) = -f(x)$
Punktsymmetrie

- a) $S_y(0 | -1)$; $N_1(-2 | 0)$; $N_2(0,5 | 0)$; $N_3(2 | 0)$ (doppelt)
- b) „Von links oben nach rechts oben“
- c) Graph:



- a) $N_1(-21 | 0)$; $N_2(0 | 0)$; $N_3(25 | 0)$
 N_1 macht keinen Sinn; bei null Verkäufen ist der Gewinn 0, ebenso bei 25000 Verkäufen.
- b) Das sollten sie nicht anstreben, denn bei $x = 300$ wäre der Gewinn negativ.

Kapitel 5: Raumgeometrie

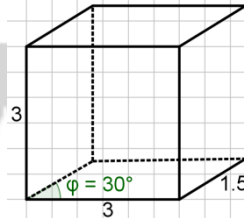
Schrägbilder

Die Zeichnung eines Körpers nennt man Schrägbild.

Im Schrägbild erscheinen

- zur Zeichenebene parallele Strecken in wahrer Länge und Richtung (parallele Strecken bleiben immer parallel!).
- zur Zeichenebene senkrechte Strecken unter einem **Verzerrungswinkel** φ und im gleichen Verhältnis um einen **Verkürzungsfaktor** k verkürzt. Es gilt: $k = \frac{a_{\text{verkürzt}}}{a_{\text{original}}}$.

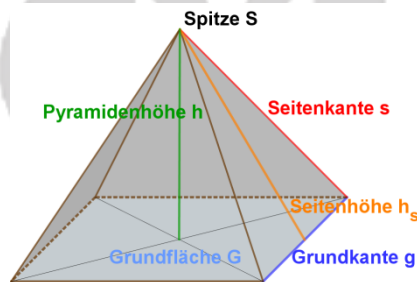
Beispiel eines Würfel-Schrägbildes mit Verzerrungswinkel $\varphi = 30^\circ$ und Verkürzungsfaktor $k = 0,5$.

**Pyramide**

Das Körpernetz einer Pyramide besteht aus einem n -Eck (Grundfläche G) und n Dreiecken (Mantelfläche M).

Oberflächeninhalt: $O = G + M$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

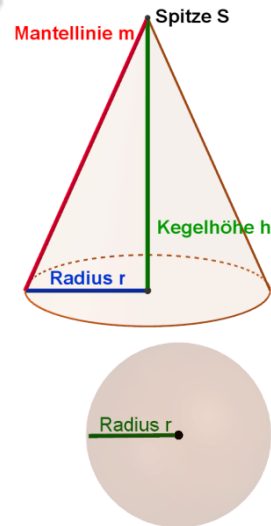
**Kegel**

Das Körpernetz eines Kegels besteht aus einem Kreis (Grundfläche G) und einem Kreissektor (Mantelfläche). Der Mittelpunktswinkel α der Mantelfläche berechnet sich mit $\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ$.

Mantelflächeninhalt: $M = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot m^2 \pi = r \cdot m \cdot \pi$

Oberflächeninhalt: $O = G + M = r^2 \pi + r m \pi$

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$

**Kugel**

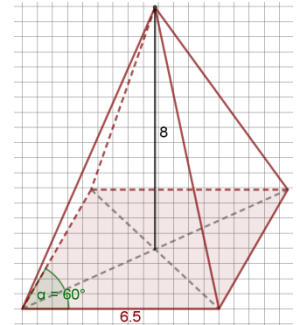
Für eine Kugel mit dem Radius r gilt:

Oberflächeninhalt: $O = 4r^2 \pi$

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$

1. Gegeben ist eine gerade, quadratische Pyramide mit Grundkante $g = 6,5\text{cm}$ und der Höhe $h = 8\text{cm}$.

- Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit Verzerrungswinkel $\varphi = 60^\circ$ und Verkürzungsfaktor $k = 0,7$.
- Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt



2. Befördert man 2m^3 Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92cm Höhe.

- Ermittle den Radius der Grundfläche dieses kegelförmigen Sandhaufens.
- Berechne die Länge der Mantellinie m .
- Berechne die Größe des Mittelpunktswinkels der Mantelfläche im Körpernetz.

b) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 169\text{cm}^3$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{1}{2}g\right)^2 + h^2} \approx 12,4\text{cm}$$

$$O = G + M = g^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}g \cdot h_s \approx 203,4\text{cm}^2$$

2. a) $r = \left(\sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}\right) \approx 1,44\text{m}$

b) $m = \sqrt{h^2 + r^2} \approx 1,71\text{m}$

c) $\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ \approx 303^\circ$

$$3. V_{\text{ganz}} = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{250}{3} \pi \text{cm}^3$$

$$V_{\text{halb}} = \frac{1}{3} \cdot r_{\text{halb}}^2 \cdot \pi \cdot h_{\text{halb}} = \frac{25}{6} \pi$$

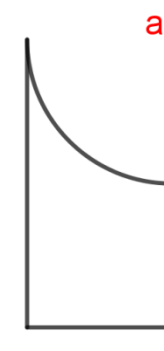
$$\text{Anteil: } \frac{V_{\text{halb}}}{V_{\text{ganz}}} = \frac{1}{20} = 5\%$$

3. Ein kegelförmiges Sektglas mit dem Radius $r = 5\text{cm}$ und der Höhe $h = 10\text{cm}$ ist bis zur halben Höhe gefüllt. Ermittle, zu wieviel Prozent des gesamten Volumens das Glas damit gefüllt ist.

4. Ein Rechteck (Seitenlängen 8cm und 4cm), aus dem ein Viertelkreis herausgeschnitten ist, wird um die Achse a gedreht (siehe Bild).

- Erkläre, welche Form der Rotationskörper hat.

b) Berechne seine Masse, wenn dieser aus Kunststoff (Dichte $\rho = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) besteht.



4. a) Der Rotationskörper ist ein Zylinder, aus dem eine Halbkugel herausgeschnitten ist.

$$\begin{aligned} b) V &= V_{\text{Zyl}} - V_{\text{Halbkugel}} \\ &= \frac{256}{3} \pi \text{cm}^3 \approx 268,08\text{cm}^3 \\ m &= \frac{V}{\rho} = \frac{256}{3} \pi \text{cm}^3 \cdot 1,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ &= 128\pi \text{g} \approx 402\text{g} \end{aligned}$$