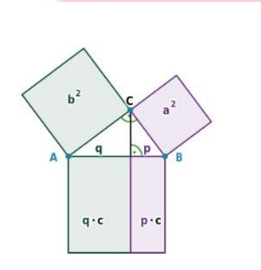
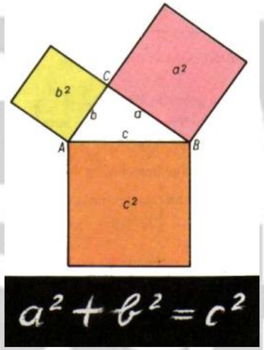
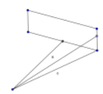
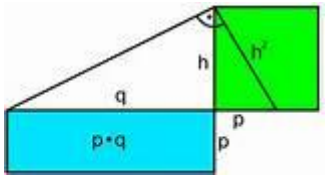
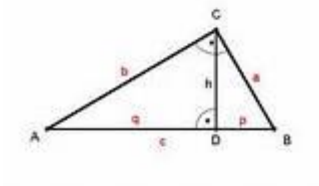
Grundwissen Mathematik 9 . Klasse

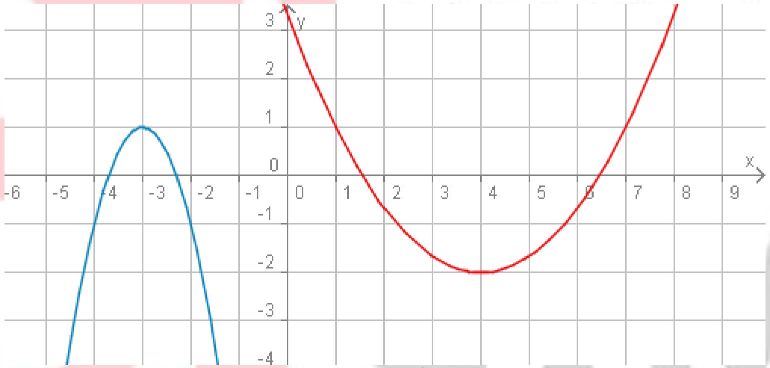
Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
Quadratwurzeln: $\boldsymbol{\sqrt{a}}$, $\boldsymbol{a \geq 0}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. D.h.: $\sqrt{a}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$. **Irrationale Zahlen:** Es gibt Zahlen a > 0, für die $\sqrt{a}$ keine rationale Zahl ist. Irrationale Zahlen lassen sich als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche schreiben. **Reelle Zahlen $\mathbb{R}$:** Rationale und irrationale Zahlen ergeben zusammen die Menge der **Reellen Zahlen $\mathbb{R}$.**	1. Berechne: a) $\sqrt{1{,}44}$ b) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ c) $\sqrt{(-0{,}6)^2}$ d) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ 2. Ergänze den Satzbeginn durch „Jede“, „Manche“ oder „Keine“. Gib jeweils ein Beispiel an: a) … irrationale Zahl ist eine reelle Zahl. b) … reelle Zahl(en) ist eine (sind) irrationale Zahl(en).	*1.a) 1,2* *b)* $\frac{7}{8}$ *c)* $\sqrt{0{,}6^2}$ *=0,6* *d)* $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ *2.a) „Jede“ z.B.* $\sqrt{3}$ *b) „Manche“* *z.B.* $\sqrt{3}\epsilon\mathbb{R}$ *und* $\sqrt{3}$ *ist irrational, aber -4* $\epsilon\mathbb{R}$ *aber -4 ist nicht irrational.*
Rechnen mit Quadratwurzeln: **→ Für alle $\boldsymbol{a\epsilon\mathbb{R}}$ gilt:** $\boldsymbol{\sqrt{a^2} = \vert a\vert}$ **→** $\boldsymbol{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}}$ **„Multiplikationsregel“** **→** $\boldsymbol{\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b}}$ **„Divisionsregel“** **Aber:** $\boldsymbol{\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}}$	1. Ziehe teilweise die Wurzel: a) $\sqrt{147}$ b) $\sqrt{25d^3}$ 2. Vereinfache (ohne TR): a) $6\sqrt{5}-\sqrt{5}+2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{9a^5}-\sqrt{a^3}$	*1.a) =* $\sqrt{49\cdot 3} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ *b) =* $\sqrt{25d^2\cdot d} = 5\cdot\vert d\vert\sqrt{d}$ *2.a) =* $\sqrt{5}\cdot(6-1+2) = 7\sqrt{5}$ *b) =* $\sqrt{9a^4\cdot a}-\sqrt{a^2\cdot a} =$ $= 3a^2\sqrt{a}-\vert a\vert\sqrt{a}$
Binomische Formeln: **→ (a + b)² = a² + 2ab + b²** **1.binomische Formel** **→ (a – b)² = a² - 2ab + b²** **2.binomische Formel** **→ (a + b)(a – b) = a² - b²** **3.binomische Formel**	1. Schreibe als Produkt: a) $100x^2 - 140x + 49$ b) $3a^2 - 30a + 75$ 2. Ergänze zu einer binomischen Formel: a) $0{,}16b^2 - \Delta + \nabla = (0{,}4b - 6c)^2$ b) $\frac{1}{16}r^4 + \Delta + 2 = (\Delta \diamond \nabla)^2$ 3. Mache den Nenner rational: $\frac{y-6}{\sqrt{y}+\sqrt{6}}$, $(y \geq 0)$	*1.a) =* $(10x)^2 - 2\cdot 10x\cdot 7 + 7^2$= $= (10x-7)^2$ *b) =* $3(a^2-10a+25) = 3(a-5)^2$ *2.a) =* $0{,}16b^2 - 4{,}8bc + 36c^2$ $= (0{,}4b-6c)^2$ *b) =* $\frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}r^2 + 2$ $= \left(\frac{1}{4}r^2+\sqrt{2}\right)^2$ *3.* $= \frac{(y-6)(\sqrt{y}-\sqrt{6})}{(\sqrt{y}+\sqrt{6})(\sqrt{y}-\sqrt{6})} = \frac{(y-6)(\sqrt{y}-\sqrt{6})}{(y-6)} =$ $\sqrt{y}-\sqrt{6}$

n-te Wurzeln: Für $a \ge 0$ versteht man unter $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$; $(n \in \mathbb{N})$ **Schreibweise:** $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ **Potenzen mit rationalen Exponenten: Für $a \ge 0$ gilt:** $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$; $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ **Rechengesetze: Gleiche Basis** **Gleiche Exponenten** $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $a^r : a^s = a^{r-s}$ $a^r : b^r = (a : b)^r$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $(a, b \in \mathbb{Q}^+, r, s \in \mathbb{Q})$	1. Vereinfache und gib das Ergebnis als Wurzel an: a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3}$ b) $\sqrt[4]{2^9} : \sqrt{2^7}$ c) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}$ 2. Vereinfache: $2 \cdot \sqrt[3]{16} + 5 \cdot \sqrt[3]{250}$	*1.a)* = $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = 3^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{3^9}$ *b)* = $2^{\frac{9}{4}} : 2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{9}{4}-\frac{7}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}$ *c)* = $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{5}$ *2.* = $2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 8} + 5 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 125}$ = = $2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2}$ = = $\sqrt[3]{2} \cdot (4 + 25) = \sqrt[3]{2} \cdot 29$
Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$ **Satz des Pythagoras:** $a^2 + b^2 = c^2$   	1. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC hat die Hypotenusenabschnitte p = 3cm und q = 7cm. Berechne alle Seitenlängen sowie den Flächeninhalt des Dreiecks. 2. Elfmeter: Thomas knallt den Ball in einer Höhe von 1,50m an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei (geradlinige Flugbahn voraus-gesetzt) zurück ? Das Tor ist 7,32m breit und 2,44m hoch.	*1.* *c = p + q = 10 cm* $a^2 = c \cdot p$ $\Rightarrow a = \sqrt{10cm \cdot 3cm} = 5{,}5cm$ $b = \sqrt{c \cdot q} = 8{,}4cm$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 23{,}1cm^2$ *2.* $c = \sqrt{(11m)^2 + (0{,}5 \cdot 7{,}32m)^2}$ *= 11,59m* $s = \sqrt{c^2 + h^2}$ *= 11,69m* 
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$  	Im unten abgebildeten Dreieck (nicht maßstabs-getreu) ist h = 6,0cm und q = 18,0cm. Berechne die Seitenlängen a, b und c.  	$h^2 = p \cdot q \;\Rightarrow\; p = \frac{h^2}{q} = 2{,}0cm$ $c = p + q = 20{,}0cm$ $a^2 = c \cdot p = 40{,}0cm^2 \Rightarrow$ $a = 6{,}3cm$ $b^2 = c \cdot q = 360cm^2 \Rightarrow$ $b = 19{,}0cm$

Quadratische Funktionen: Eine Funktion der Form

$\boldsymbol{f: x \to ax^2 + bx + c \;; (a \neq 0)}$

heißt quadratische Funktion.
Der Graph einer quadratischen Fkt. heißt **<u>Parabel.</u>**
Der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen heißt **<u>Scheitel.</u>**



Scheitelpunktsform: $\boldsymbol{f(x) = a(x-d)^2 + e}$

Der Graph von f ist eine Parabel mit dem **<u>Scheitel S(d/e)</u>** und dem **<u>Formfaktor a.</u>**

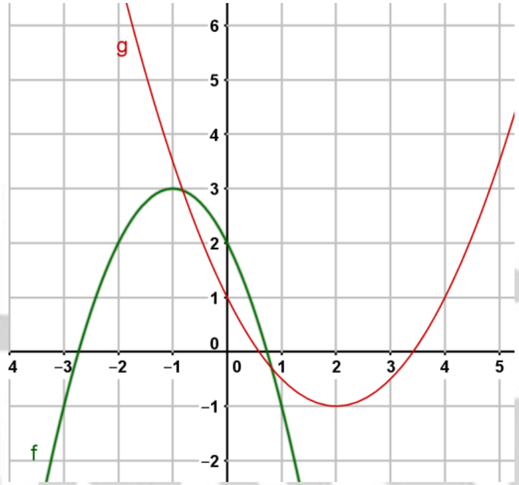
$\boldsymbol{a > 0 \Rightarrow Parabel\ nach\ oben\ geöffnet}$

$\boldsymbol{a < 0}$
$\boldsymbol{\Rightarrow Parabel\ nach\ unten\ geöffnet}$

$\boldsymbol{|a| > 1 \Rightarrow Parabel\ ist\ enger\ als\ die\ Normalparabel}$

$\boldsymbol{|a| < 1 \Rightarrow Parabel\ ist\ weiter\ als\ die\ Normalparabel}$

1. Gib zu den abgebildeten Parabeln jeweils die Scheitelpunktsform an:



2. Beschreibe den Graphen der Funktion
$f: x \to -3x^2 - 24x - 50$
möglichst genau, indem du den Funktionsterm auf die Scheitelpunktsform bringst.

1. $f: y = -(x+1)^2 + 3$
$g: y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$

2. $f(x) = -3(x^2 + 8x)^2 - 50 = =$
$-3(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2) - 50 = =$
$-3(x+4)^2 + 3 \cdot 16 - 50 =$
$= -3(x+4)^2 - 2$
G_f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die enger als die Normalparabel ist. Ihr Scheitel liegt bei S(-4 / -2).

Quadratische Gleichungen: Eine quadratische Gleichung der Form

$ax^2 + bx + c = 0$, $\boldsymbol{a \neq 0}$

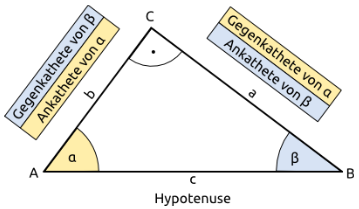
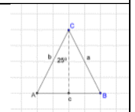
hat die Lösungen

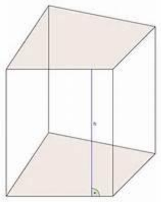
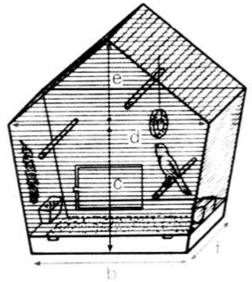
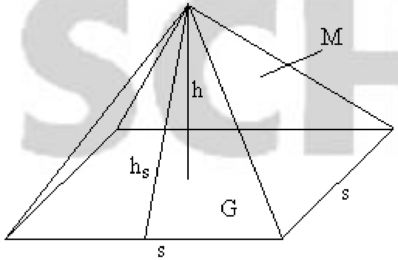
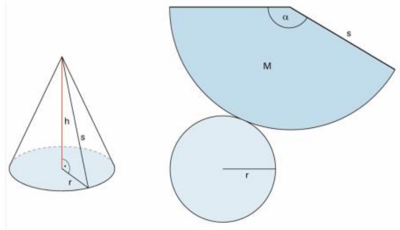
$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \ .$$

Der Term $D = b^2 - 4ac$ heißt **<u>Diskriminante</u>**. Es gilt:
$D = 0 \Rightarrow Genau\ eine\ Lösung; D > 0 \ \Rightarrow Zwei\ Lösungen$
$D < 0 \Rightarrow Keine\ Lösung$

Bestimme die Anzahl der Lösungen sowie, soweit vorhanden die Lösungszahlen:
a) $2x^2 + 8x - 42 = 0$;
b) $-x^2 + 6x - 9 = 0$;
c) $3x^2 - 9x + 24 = 0$;

a) *D = 20 ⇒ 2 Lösungen*
$x_1 = -7$; $x_2 = 3$
b) *D =* $\sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)} = 0 \Rightarrow$
Eine Lösung
x = 3
c) *D =* $\sqrt{-207}$ $\Rightarrow$ *Keine Lösung*
-

Anwendungsaufgaben zu den Quadratfunktionen: - Wähle ein, für die Situation möglichst geschickt gewähltes Koordinatensystem - Stelle darin die Gleichung der Parabel auf - Je nach Fragestellung ist z.B. der Scheitel oder Nullstellen gesucht **Schnittprobleme:** - Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen werden bestimmt, indem man die Funktionsterme gleichsetzt	1. Bei einem Schülerwettbewerb im Kugelstoßen wird die Kugel im Punkt A aus einer Höhe von 2m schräg nach oben gestoßen. Ihre Flugbahn ist parabelförmig. Ihren höchsten Punkt H hat die Parabel in einer Höhe von 4,5m. H liegt in waagrechter Entfernung 5m von A entfernt. Welche Weite erreicht der Stoß ? 2. Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte von f(x) = 2x² - 4x +1 und g(x) = -2x + t in Abhängigkeit vom Parameter t.	1. *Parabelpunkte A(0/2),H(5/4,5) H-Scheitel Beachte: Auch B(10/2) liegt auf* *G_f.* $f(x) = -0{,}1x^2 + x + 2$ *Nullstelle von f: x = 11,708(m)* 2. *Ansatz:* *2x² - 4x + 1 = -2x + t;* *2x² - 2x + (1- t) = 0;* *Diskriminante: D = 8t – 4* $t > \frac{1}{2} \Rightarrow Zwei\ Schnittp.$ $t = \frac{1}{2} \Rightarrow Ein\ Berührp.$ $t < \frac{1}{2} \Rightarrow Kein\ Schnittp.$
Mehrstufige Zufallsexperimente und Pfadregeln: - Zufallsexperimente, bei denen man mehrere Teilex-perimente unabhängig nacheinander durchgeführt werden, heißen <u>**mehrstufig.**</u> - **1.Pfadregel:** Die Ws. Eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahr-scheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ereignis gehört - **2.Pfadregel:** Die Ws. Eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadws., die zu diesem Ereignis gehören.	1. Du ziehst aus einem Stapel aus 20 gut ge-mischten Karten (4 Farben) nacheinander zweimal ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehst du zwei Herzkarten? 2. Es werden zwei gezinkte Münzen mit p(Zahl) = 0,6 nacheinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen zwei verschiedene Seiten der Münze?	1. *(1.Pfadregel)* *P(zwei Herzk.) =* $\frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = 5{,}26\%$ 2. *Zum Ereignis gehören zwei ver-schiedene Pfade im Baum-diagramm:* *P(versch. Lagen) = P(WZ, ZW) =* *P(WZ) + P(ZW) =* $= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 48\%$
Trigonometrie / Betrachtungen am rechtwinkligen Dreieck: - $\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$ - $\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$ - $\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$  	1. Berechne die Länge der Basis eines gleich-schenkligen Dreiecks, dessen Schenkel 4,0 cm lang sind, und bei dem der Winkel an der Spitze 50^0 beträgt. 2. Ein 35m hoher Turm wirf wirft Mittags einen 18m langen Schatten auf den Boden. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden?	 1. $sin25^0 = \frac{\frac{1}{2}c}{b}$ $c = 2 \cdot b \cdot sin25^0 =$ $=2 \cdot 4cm \cdot sin25^0 = 3{,}4cm$ 2. $tan\ \alpha = \frac{35m}{18m}$ $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{35}{18}\right) = 62{,}8^0$

Berechnungen an Körpern: **1. Volumen und Oberfläche von Prismen** $\boldsymbol{V = G \cdot h}$ ***Volumen*** $\boldsymbol{O = 2 \cdot G + M}$ ***Oberfläche*** ***M - Mantelfläche***  **2. Volumen und Oberfläche von Zylindern** $\boldsymbol{V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h}$ ***Volumen*** $\boldsymbol{O = 2 \cdot G + M = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h}$ ***Oberfläche***	1. Vogelkäfig Der in der Abbildung dargestellte Vogelkäfig hat die Maße b = 35cm, c = 29cm , d = 45cm , e =19cm und f = 23cm . Berechne, welchen Raum der Vogel in dem Käfig hat.  2. Eine Rolle Eisendraht ($\varrho = 7{,}85 \frac{g}{cm^3}$) hat eine Masse von 13,5kg. Wie lange ist der Draht, wenn sein Durchmesser 2,4mm beträgt?	***1.*** $V = G \cdot h =$ $= \left[\frac{1}{2} \cdot d \cdot e + \frac{1}{2} \cdot (b+d) \cdot c\right] \cdot f$ $= 36512{,}5cm^3$ $= 36{,}5l$ ***2.*** $m = \varrho \cdot V$ $m = \varrho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l$ *l – Drahtlänge* $l = \frac{m}{\varrho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$ $= \frac{13500g}{7{,}85 \frac{g}{cm^3} \cdot (0{,}12cm)^2 \cdot \pi} =$ $= 380m$
3. Volumen und Oberfläche von Pyramiden **Eine Pyramide vom Grundflächeninhalt G und einer Höhe h hat das Volumen** $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h}$ 	3. Berechne das Volumen und den Oberflächen-inhalt einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge s = 6,5cm und der Höhe h = 12cm.	*3. Skizziere ein Schrägbild mit Stützdreieck* $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h = 169cm^3$ $O = G + M =$ $= s^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} s \cdot h_\Delta$ *mit* $h_\Delta = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 + h^2} =$ *12,4cm; O = 203,4cm²*
4. Volumen und Oberfläche von Kegeln $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot h}$ $\boldsymbol{M = \pi r \cdot s}$ $\boldsymbol{O = G + M = r^2\pi + \pi r \cdot s}$  gerader Kreiskegel	4. Befördert man 2m³ Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92cm Höhe. a) Welchen Durchmesser hat der Kegel? b) Berechne die Mantellienienlänge s.	*4. a)* $d = 2r = 2\sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}$ *= 2,88m* *b)* $s = \sqrt{h^2 + r^2}$ *= 1,71m*