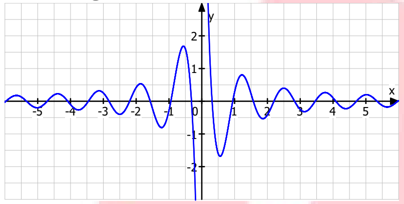
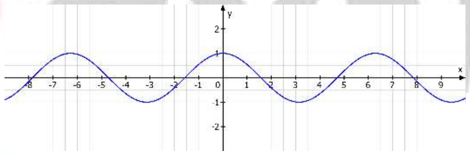
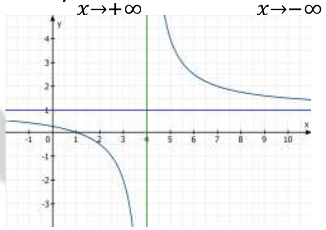
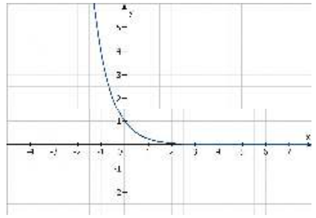
Grundwissen Mathematik 11 . Klasse

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
Grenzwerte von Funktionen Eine Funktion f besitzt einen Grenzwert a, wenn sie für beliebig groß (bzw. klein) werdende x-Werte der Zahl a beliebig nahe kommt. Notation: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$) In diesem Fall **konvergiert** die Funktion f gegen a für $x \to \infty$ (bzw. $x \to -\infty$). Die Gerade $y = a$ ist eine **waagerechte Asymptote** des Graphen von f. Liegt keine Konvergenz vor, so **divergiert** eine Funktion. Konvergente Funktion:  Divergente Funktion: 	1. Skizzieren Sie den Graphen von f und geben Sie den Grenzwert der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an. a) $f: x \mapsto \frac{3}{x-4} + 1$ b) $f: x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 2. Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+2x+1} = 0$ gilt.	1. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$   2. $\frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{1}{(x+2)^2}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \frac{1}{(x+2)^2} = 0$, da der Nenner des Bruchs für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ strebt und somit der Wert des Bruchs für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gegen 0 geht.
Symmetrie von Funktionsgraphen → *Setze $-x$ in den Funktionsterm ein.* – G_f ist **achsensymmetrisch** bzgl. der y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ – G_f ist **punktsymmetrisch** bzgl. des Koordinatenursprungs, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$	3. Untersuchen Sie, ob der zur Funktion gehörige Graph achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung ist. a) $a: \mapsto \frac{1}{x-1}$ b) $b: \mapsto 2 \cdot cos(x) - 2$ c) $c: \mapsto 3^x$	3. a) $a(-x) = \frac{1}{-x-1} = -\frac{1}{x+1} \neq -a(x)$ $a(-x) = \frac{1}{-x-1} \neq a(x)$ Es liegt keine Symmetrie vor. b) $b(-x) = 2 \cdot cos(-x) - 2 = 2 \cdot cos(x) - 2 = b(x)$ b ist achsensymmetrisch zur y-Achse c) $c(-x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \neq c(x)$ $c(-x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \neq -c(x)$ Es liegt keine Symmetrie vor.

<table>
<tr>
<td>

Parametereinfluss im Funktionsterm auf den Funktionsgraphen

Der Graph einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot f\big(b(x-c)\big) + d$ mit $a, b \neq 0$ geht aus dem Graphen von f hervor durch die folgenden Transformationen:

1. **Strecken** mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung und dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ in x-Richtung sowie **Spiegeln** an der x-Achse, falls $a < 0$, und an der y-Achse, falls $b < 0$,
2. **Verschieben** um c Einheiten in x-Richtung und d Einheiten in y-Richtung.

Wichtig: **Erst strecken oder spiegeln, dann verschieben!**

</td>
<td>

4. Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot cos\big(-0{,}5(x+2)\big)$ aus dem Graphen der Kosinusfunktion hervorgeht.

5. Zeigen Sie, dass der Graph von $h: x \mapsto -\frac{4}{x}$ aus dem Graphen von $f: x \mapsto -\frac{2}{x-1}$ hervorgeht.

</td>
<td>

4. Der Graph von f geht aus dem Graphen der Kosinus durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung, anschließender Spiegelung an der y-Achse verbunden mit einer Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung und einer Verschiebung um -2 in x-Richtung hervor.

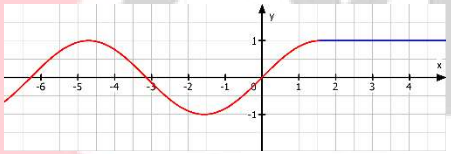
5. $-2f(x+1) = -2\frac{2}{x+1-1} = -\frac{4}{x} = h(x)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Stetigkeit

Eine **abschnittsweise definierte Funktion** besitzt in unterschiedlichen Teilabschnitten ihrer Definitionsmenge unterschiedliche Funktionsterme, z.B.

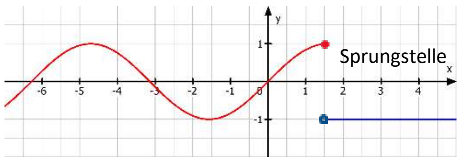
$f: x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & für\ x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & für\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$



Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D_f$, wenn der Graph an dieser Stelle **keine Sprungstelle** besitzt (⇒ man muss den Funktions-graphen ohne Stiftabsetzen zeichnen können.) Die oben abgebildete Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$, da $\sin(1) = 1$.

Die unten abgebildete Funktion g ist **nicht stetig** an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$, da die Funktion hier eine Sprungstelle besitzt.

$g: x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & für\ x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & für\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$



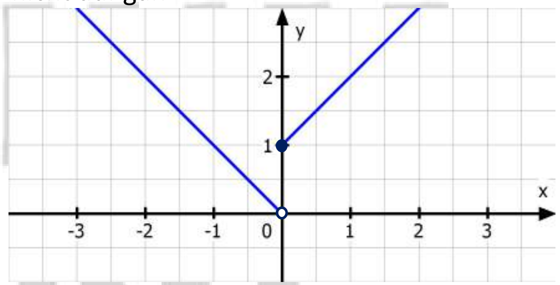
</td>
<td>

6. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} -x & für\ x<0 \\ x+1 & für\ x \geq 0 \end{cases}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und notieren Sie die Intervalle, in denen die Funktion f stetig ist.

7. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x} & für\ x<-1 \\ ax+1-3a & für\ x \geq -1 \end{cases}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass die Funktion f stetig ist.

</td>
<td>

6. Die Funktion ist stetig auf $]-\infty; 0[$ und auf $[0; \infty[$, aber nicht auf ganz $\mathbb{R}$.



7. $f_1(-1) = -\frac{1}{(-1)} = 1 \Rightarrow$ Wir suchen einen Parameter a, sodass auch $f_2(-1) = 1$ gilt.
$a \cdot (-1) + 1 - 3 \cdot (-1) = 1$
$-a + 4 = 1$
$-a = -3$
$\Rightarrow a = 3$

</td>
</tr>
</table>

Gebrochen-rationale Funktionen

Funktionen der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ heißen gebrochen-rational, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mindestens vom Grad 1 sind.

Eigenschaften:

1. Maximale Definitionsmenge D_f:
Einfache gebrochen-rationale Funktionen mit Nennernullstelle(n) $x_0, x_1, \ldots$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \ldots\}$

2. Wertemenge W_f:
Enthält alle Funktionswerte, die die Funktion f annimmt.

3. Schnittpunkte mit Koordinatenachsen:
y- Achsen-Schnittpunkt: $S_y(0|f(0))$ falls $0 \epsilon D_f$
Nullstellen: *Löse die Gleichung* $f(x) = 0$
Oft hilfreich: Mitternachtsformel und/oder Ausklammern der größten x-Potenz

4. Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Das Verhalten einer einfach gebrochen-rationalen Funktion $f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ hängt vom Grad des Zähler- und Nennerpolynoms (Z und N) ab:

Verhältnis Z und N	Grenzwert	Asymptote
$Z < N$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$	$y = 0$ ist waagerechte Asymptote
$Z = N$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, wobei a der Quotient aus dem Koeffizienten der höchsten Potenzen von $p(x)$ und $q(x)$ ist.	$y = a$ ist waagerechte Asymptote
$Z > N$	$f(x)$ divergiert	schräge Asymptote*

*Ist $f(x)$ in der Form $f(x) = mx + t + r(x)$ vor, wobei $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$, $m, t \in \mathbb{R}$ *und* $m \neq 0$ gilt, dann ist $y = mx + t$ eine Gleichung der schrägen Asymptote

8. Gegeben ist die Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D_f. Bestimmen Sie D_f sowie alle Nullstellen von f.
a) $f: x \mapsto \frac{3x+3}{x^2+6x+3}$
b) $f: x \mapsto \frac{6}{x+8} + 10$

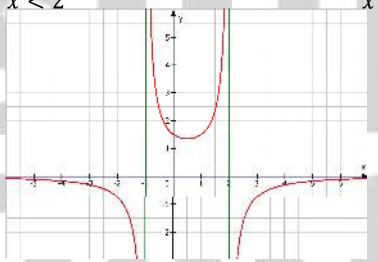
9. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-7x-1}{15-21x}$.
a) Beschreiben und begründen Sie den Verlauf des Funktionsgraphens G_f.
b) Ermitteln Sie mithilfe geeigneter Termumformungen das Verhalten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

10. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$ mit maximalen Definitionsbereich D. Zeigen Sie, dass $f(x)$ zum Term $x + 7 + \frac{16}{x-1}$ äquivalent ist und geben Sie die Bedeutung der Geraden $y = x + 7$ für den Graphen von f an. (Abiturprüfung 2017 Bayern)

8. a) Bestimmung der Nennernullstellen:
$x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} = \frac{-6\pm\sqrt{36-12}}{2}$
$x_1 = -3 + \sqrt{3}$ und
$x_2 = -3 - \sqrt{3}$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3+\sqrt{3}; -3-\sqrt{3}\}$
Bestimmung der Zählernullstellen:
$3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$
$x = -\frac{1}{3}$ ist die einzige Nullstelle.
b) Bestimmung der Nennernullstelle für D_f: $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$
Nullstellen: $\frac{6}{x+8} + 10 = 0 \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x+8} = -10 \Leftrightarrow$
$6 = -10 \cdot (x+8) \Leftrightarrow 6 = -10x - 80 \Leftrightarrow$
$86 = -10x \Leftrightarrow x = -8{,}6$
$x = -8{,}6$ ist die einzige Nullstelle.

9. a) Da $Z = N$ gilt, konvergiert f für $x \to \pm\infty$ gegen $\frac{-7}{-21} = \frac{1}{3}$. Damit nähert sich G_f im Unendlichen der waagerechten Asymptote $y = \frac{1}{3}$ an.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7x-10}{15-21x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(-7-\frac{10}{x}\right)}{x\cdot\left(\frac{15}{x}-21\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7-\frac{10}{x}}{\frac{15}{x}-21} = \frac{-7-0}{0-21} = \frac{-7}{-21} = \frac{1}{3}$

10. $x + 7 + \frac{16}{x-1} = \frac{(x+7)\cdot(x-1)}{x-1} + \frac{16}{x-1} = \frac{x^2-x+7x-7}{x-1} + \frac{16}{x-1} = \frac{x^2+6x-7}{x-1} + \frac{16}{x-1} = \frac{x^2+6x-7+16}{x-1} = \frac{x^2+6x+9}{x-1} = \frac{(x+3)^2}{x-1} = f(x)$
Die Gerade g ist die schräge Asymptote des Graphen von f.

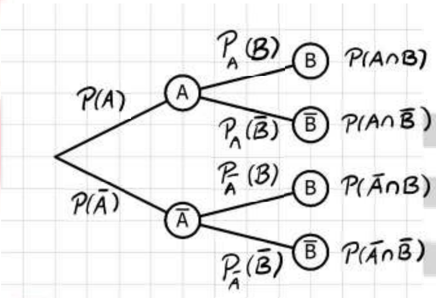
5. Verhalten in der Umgebung von Polstellen Eine **Polstellen** ist eine Definitionslücke x_0 einer gebrochen-rationalen Funktion f. Die Gerade $x = x_0$ ist dann eine **senkrechte Asymptote** des Graphen G_f. Ist x_0 eine einfache Nennernullstelle, so ist x_0 eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW). Ist x_0 eine doppelte Nennernullstelle, so ist x_0 eine Polstelle ohne VZW.	11.Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{-3}{x^2-x-2}$. Geben Sie D_f an und ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f. Bestimmen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücken und skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.	11.Defintionsmenge: $x_{1,2} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{1\pm3}{2}$ $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ und $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ Gleichungen der Asymptoten: Senkr. AS: $x = -1$ und $x = 2$ Waag. AS: : $y = 0$, da $Z < N$ Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken: $f(x) = \frac{-3}{x^2-x-2} = \frac{-3}{(x+1)(x-2)} = -3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ 
Schnittpunkte von Graphen ermitteln 1. Setze die Funktionsterme gleich 2. Gleichung lösen und überprüfen, ob die Lösung(en) auch in beiden Definitionsmengen enthalten sind. 3. Einsetzen der Lösung(en) in einen der beiden Funktionsterme.	12. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{-2x-5}{x^2-1}$ und $h: x \mapsto \frac{x-5}{x^2-1}$. Geben Sie Defintionsmenge beider Funktionen an und zeigen Sie rechnerisch, dass die Graphen beider Funktionen genau einen gemeinsamen Punkt S besitzen und geben Sie dessen Koordinaten an.	12. $D_f = D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ $\frac{-2x-5}{x^2-1} = \frac{x-5}{x^2-1} \quad \vert\cdot (x^2-1)$ $-2x - 5 = x - 5$ $-3x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ $h(0) = \frac{0-5}{0^2-1} = \frac{-5}{-1} = 5$ $S(0\vert5)$ ist der Schnittpunkt beider Funktionen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P_B(A)}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, unter der **Voraussetzung**, dass B eingetreten ist.

Berechnung: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Im Baumdiagramm:



Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn

- $P_A(B) = P(B)$ bzw. $P_B(A) = P(A)$ bzw.
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(Das bedeutet, dass eine Voraussetzung keinen Einfluss auf das Eintreten des Ereignisses hat).

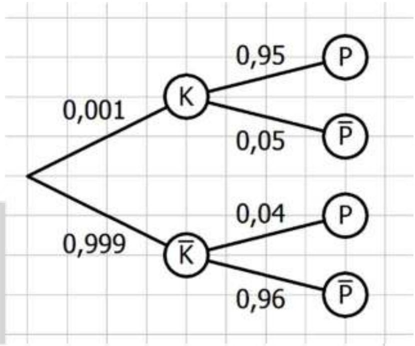
13. In der Bevölkerung sind 0,1 % aller Personen an Tbc erkrankt. Ein Test zur Tbc-Erkennung zeigt bei 95% aller Tbc-Erkrankten die Krankheit an. In 4% der Fälle ist das Testergebnis falsch positiv. Bei einer zufällig ausgewählten Person ist das Testergebnis positiv. Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Person tatsächlich an Tbc erkrankt ist.

14. An einem Stadtlauf nahmen 200 Personen teil, darunter 75 Jugendliche. Insgesamt erreichten 80 der Teilnehmenden eine Zeit von unter 30 Minuten, darunter 50 Jugendliche.

a) Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten für die Ereignisse
J: „Person ist jugendlich."
U: „Person blieb unter 30 Minuten."

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse J und U stochastisch unabhängig sind.

13. P: „Test positiv"
K: „Person ist an Tbc erkrankt"



$$P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{P(K \cap T)}{P(K \cap T) + P(\bar{K} \cap T)} = \frac{0{,}001 \cdot 0{,}95}{0{,}001 \cdot 0{,}95 + 0{,}999 \cdot 0{,}04} = \frac{95}{4091} \approx 2{,}3\,\%$$

14.a)

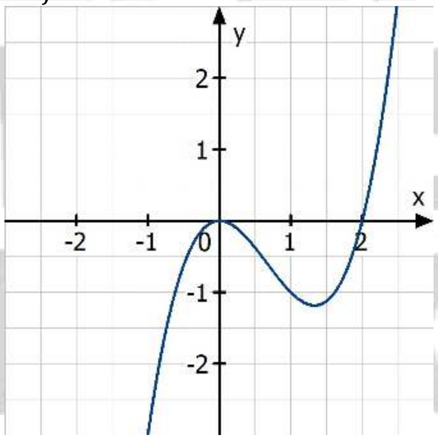
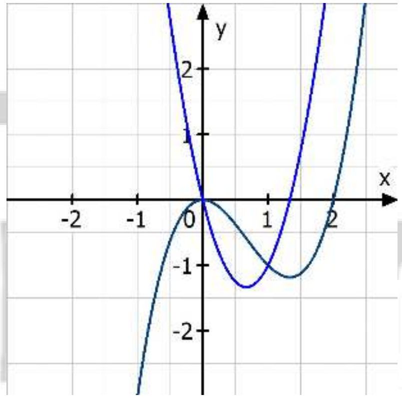
	J	$\bar{J}$	
U	0,15	0,25	0,4
$\bar{U}$	0,225	0,375	0,6
	0,375	0,625	1

$b)\ P(J \cap U) = 0{,}15$

$P(J) \cdot P(U) = 0{,}375 \cdot 0{,}4$
$= 0{,}15$

→ Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig.

Differenzenquotient Der **Differenzenquotient** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gibt die **mittlere Änderungsrate** der Funktion f im Intervall $[a;b]$ an. Anschaulich entspricht die mittlere Änderungsrate der **Steigung der Sekante** durch die Punkte $A(a\|f(a))$ und $B(b\|f(b))$.	15. Die Funktion $k: t \mapsto 76 \cdot 0{,}95^t + 21$ mit $t \geq 0$ beschreibt das Abkühlen von Kaffee in der Tasse in °C und t in Minuten. a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Intervall [5;10]. b) Interpretieren Sie den Wert aus im Sachzusammenhang.	15. a) $\frac{k(10)-k(5)}{10-5} \approx -2{,}66$ b) In der Zeit zwischen 5 und 10 min sinkt die Temperatur im Mittel um 2,66°.
Differentialquotient Nähert sich der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$ von beiden Seiten demselben Wert an, so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **Ableitung $f'(x_0)$**: $f'(x_0) = \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{"x_0-Methode"}$ bzw. $f'(x_0) = \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{"h-Methode"}$ Er gibt die **lokale Änderungsrate** der Funktion f an der Stelle x_0. Anschaulich entspricht die lokale Änderungsrate der **Steigung der Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0\|f(x_0))$. Dies kommt der **Steigung des Graphen von f im Punkt P** gleich.	16. Bestimmen Sie mithilfe des Differentialquotienten die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$.	16. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$ $\frac{4+4n+h^2-4}{n} = \frac{4h+h^2}{n} = \frac{h\cdot(4+h)}{h} = 4+h$ $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0}(4+h) = 4$
Differenzierbarkeit f ist an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der Differentialquotient $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. <u>Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit:</u> • f differenzierbar an der Stelle $x_0 \Rightarrow$ f stetig an der Stelle x_0 • f nicht stetig an der Stelle $x_0 \Rightarrow$ f nicht differenzierbar an der Stelle x_0 • Funktion mit Knick- und Sprungstellen im Funktionsgraph sind nicht differenzierbar	17. Untersuchen Sie die stetige Funktion f rechnerisch auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. $f: x \mapsto \begin{cases} (x-2)^2 & \text{für } x \leq 3 \\ x-2 & \text{für } x > 3 \end{cases}$	17. Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(3+h-2)^2-(3-2)^2}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1^2+2h+h^2-1}{h}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h\cdot(2+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(2+h) = 2$ Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(3+h-2)$ $= \lim\limits_{h \to 0}(1+h) = 1$ Da der links- und rechtsseitge Grenzwert des Differenzenquotienten nicht übereinstimmt, existiert der Differentialquotient an dieser Stelle nicht und somit ist f an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Ableitungsfunktion Die Ableitungsfunktion f' einer differenzierbaren Funktion f gibt an jeder Stelle $x \in D_{f'}$ die Steigung der Tangente des Graphen von f bzw. die lokale Änderungsrate der Funktion f an. <u>Ableitungsregeln</u> Zum Differenzieren ganzrationaler Funktionen mit $D_f = \mathbb{R}$: ▪ **Potenzregel**: $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ Sind u und v zwei differenzierbare Funktionen, so gilt: ▪ **Summenregel**: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ ▪ **Faktorregel**: : $f(x) = k \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot u'(x)$ ▪ **Konstantenregel**: ist $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$.	18. Geben Sie einen Term der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an und beurteilen Sie, ober Graph von f an der Stelle $x_0 = 3$ steigt oder fällt. a) $f(x) = -\frac{1}{5}x^{10} + \frac{3}{4}x^2$ b) $f(x) = (x-1)^2$ 19. Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f'. Skizzieren Sie den Graphen von f. 	18. a) $f'(x) = -2x^9 + \frac{3}{2}x$ $f'(3) = -39361{,}5 \Rightarrow G_f\ fällt\ an\ der\ Stelle\ x_0 = 3$ $b)\ f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ $f'(x) = 2x - 2$ $f'(3) = 4 \Rightarrow G_f\ steigt\ an\ der\ Stelle\ x_0 = 3$ 19. 
Tangentengleichung Bestimmun der Tangente der Form $y = mx + t$ an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \| f(x_0))$. 1. Berechne $m = f'(x_0)$ (Tangentensteigung) 2. Einsetzen von m und des x- und y-Werts von P in die Geradengleichung $y = mx + t$ der Tangente und auflösen nach t. 3. Angabe der Tangentengleichung **Steigungswinkel** Für den Steigungswinkel α der Tangente gilt $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f'(x_0)}$.	20. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 2$. b) Bestimmen Sie den Steigungswinkel des Graphen an der Stelle $x_0 = 2$.	20. a) Ansatz: t(x)=mx+t $f'(x) = -3x^2 + 4x$ $m = f'(2) = -4$ $f(2) = 4$ Einsetzen in den Ansatz: $4 = -4 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 12$ Tangentengleichung: $t(x) = -4 \cdot x + 12$ b) $tan(\alpha) = f'(2) = -4, also\ \alpha \approx -75{,}96°$

Erste Ableitung und Monotonie

Gegeben sei eine Funktion f mit Definitionsmenge D. Betrachtet wird eine Teilmenge der Funktion. Die Funktion f heißt

- **streng monoton zunehmend** in T, wenn für alle $x_1, x_2 \in T\ mit$ $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$
- **streng monoton abnehmend** in T, wenn für alle $x_1, x_2 \in T\ mit$ $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Monotoniekriterium:

Ist die Funktion f auf dem Intervall T differenzierbar und gilt für alle $x_1, x_2 \dots . \in T$

- $f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ streng monoton steigend in T.
- $f'(x) < 0 \Rightarrow G_f$ streng monoton fallend in T.

21. Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ mithilfe ihrer Ableitung auf Monotonie.

21. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$3x^2 - 12x + 9 = 0$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$
Die Nullstellen von f' unterteilen den Definitionsbereich in drei Monotonieintervalle:
x < 1:
$f'(0) = 9 > 0 \rightarrow str. mon. steigend$ für $x \leq 1$
1 < x < 3:
$f'(2) = -3 < 0 \rightarrow str. mon. fallend$ für $1 \leq x \leq 3$
x > 3:
$f'(4) = 9 > 0 \rightarrow str. mon. steigend$ für $x \geq 3$

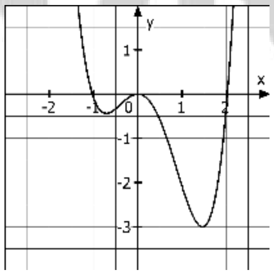
Extremstellen, Extremwerte und Extrempunkte

Um Extremstellen einer Funktion f zu bestimmen, kann man die Zusammenhänge der Graphen G_f, $G_{f'}$ und $G_{f''}$ verwenden.

G_f hat an der Stelle x_0 einen

1. **Hochpunkt**, wenn $f'(x_0) = 0$ und f' einen Vorzeichenwechsel von + nach – besitzt oder $f''(x) < 0$ gilt.
2. **Tiefpunkt**, wenn $f'(x_0) = 0$ und f' einen Vorzeichenwechsel von - nach + besitzt oder $f''(x) > 0$ gilt.
3. Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt und kein Vorzeichenwechsel vorliegt, hat G_f einen **Terrassenpunkt** an der Stelle x_o.

22. Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Geben Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte sowie die lokalen Minima und Maxima aus dem Graphen von f ab. Geben Sie, falls möglich, die globalen Extrema von f an.



23. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ auf Extrem- und Terrassenpunkte.

22. Hochpunkt: H(0|0)
Tiefpunkt: $T_1 = (0{,}7| - 0{,}4)$ und $T_2 = (1{,}5| - 3)$
Lokales Maximum: f(0)= 0
Lokale Minima: f(0,7)= - 0,4 und f(1,5)= - 3
Globales Minimum: f(1,5)= - 3
Globales Maximum: Existiert nicht, da
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

23. $f'(x) = -x^2 + 2x - 1$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$, also $x = 1$

	x<1	1	x>1
Stelle	0		2
$f'(x)$	-	0	-
Graph von f	↘		↘

An der Stelle $x = 1$ kein VZW, also Terrasenpunkt
Extrempunkt: $P\left(1|\frac{2}{3}\right)$

Zweite Ableitung und Krümmung

Ist f eine auf dem Intervall I zweimal differenzierbare Funktion, so ist der Graph von f:

- **rechtsgekrümmt**, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$
- **linksgekrümmt**, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$

Wendestelle

An der Stelle x_0 liegt eine Wendestelle vor, wenn sich die Art der Krümmung ändert. Den zugehörigen Punkt bezeichnet man als **Wendepunkt**

Es gilt $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung) und f'' hat einen Vorzeichenwechsel an der Stelle x_0 bzw. $f'''(x) \neq 0$ (hinreichende Bedingung).

<u>Charakteristische Eigenschaften ganzrationaler Funktionen:</u>

- $D_f = \mathbb{R}$
- Symmetrie
- Nullstellen inkl. Vielfachheit
- Koordinaten des y-Achsenschnittpunkts
- Verhalten für x gegen $+\infty$ und $-\infty$
- Koordinaten von Extrem- und Wendepunkten

24. Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$ mithilfe der zweiten Ableitung auf sein Krümmungsverhalten.

25. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen f mit $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$. Prüfen Sie, ob die Wendepunkte auch Terrassenpunkte sind.

24. $f'(x) = 3x^2 - 6x$
$f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Bestimmung der beiden Krümmungsintervalle:
Für x<1: $f''(0) = -6 < 0 \rightarrow rechtsgekrümmt$
Für x>1: $f''(2) = 6 > 0 \rightarrow linksgekrümmt$

25. $f'(x) = -x^3 + 3x^2$
$f''(x) = -3x^2 + 6x$
$f'''(x) = -6x + 6$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -x(3x - 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \; und \; x_2 = 2$

Möglichkeit 1: VZW-Kriterium

	x<0	0	0<x<2	2	x>2
Stelle	-9		3		-9
f''	-	0	+	0	-

VZW $\Rightarrow x_1 = 0 \; und \; x_2 = 2$ sind Wendepunkte

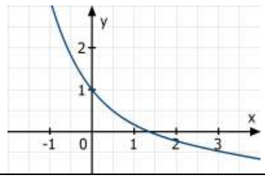
Möglichkeit 2: Einsetzen in $f'''(x)$
$f'''(0) = 6 \neq 0$ und $f'''(2) = -6 \neq 0$
Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$:
$\Rightarrow W_1(0|0)$ und $W_2(2|4)$ sind Wendepunkte.
Einsetzen der Wendestellen in $f'(x)$ zeigt, ob der Wendepunkt ein Terrasenpunkt ist:
$f'(0) = 0 \Rightarrow W_1(0|0) \; Terrassenpunkt$
$f'(2) = 4 \Rightarrow W_2(2|4) \; kein \; Terrassenpunkt$

Newton-Verfahren

Mit diesem Verfahren kann man die Nullstelle einer Funktion f näherungsweise ermittelten. Iterationsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } f'(x_n) \neq 0$$

26. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{6}x$ mit dem untenstehenden Graphen. Bestimmen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise die Nullstelle von f.



26. Schritt 1: Wähle $x_0 = 1$ als Startwert.
Schritt 2: $f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) - \frac{1}{6} = -e^{-x} - \frac{1}{6}$
Schritt 3: $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{e^{-1} - \frac{1}{6} \cdot 1}{-e^{-1} - \frac{1}{6}} \approx 1{,}38$