Grundwissen Mathematik 10. Klasse

Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen

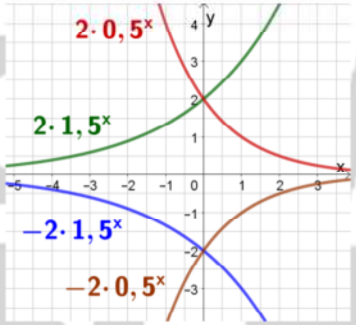
Kapitel 1: Exponentielles Wachstum und Logarithmus

Wissen

Wachstumsprozesse:

Lineares Wachstum	Exponentielle Wachstum
Wachstumsfunktion: $f(x) = mx + t$ Wachstum $\boldsymbol{m = f(x+1) - f(x)}$ Y-Achsenabschnitt t (≙ Schnittpunkt mit der y-Achse	Wachstumsfunktion: $f(x) = b \cdot a^x$ Wachstumsfaktor $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{f(x+1)}}{\boldsymbol{f(x)}}$ Startwert b (≙ Schnittpunkt mit der y-Achse

Exponentialfunktion:
Die Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = b \cdot a^x$ nennt man **Exponentialfunktion**. Eigenschaften:
- Der Graph schneidet nicht die x-Achse (d. h. die x-Achse ist waagrechte Asymptote)
- Der Graph steigt für $a > 1$ und $b > 0$ bzw. für $0 < a < 1$ und $b < 0$.



Exponentialgleichungen und Logarithmus
Die Exponentialgleichung $a^x = b$ hat genau eine Lösung, die man als Logarithmus von b zur Basis a bezeichnet. Man schreibt: $x = \log_a b$
Beispiel: $\log_3 81 = 4$, weil $3^4 = 81$
Rechenregeln: $\log_a u^x = x \cdot \log_a u$ und $\lg u = \log u = \log_{10} u$

Aufgaben/Beispiele

1. Ordne das passende Wachstumsverhalten zu und gib eine Wachstumsfunktion an.
   a) 5000€ werden mit 3% pro Jahr angelegt.
   b) Ein leeres Schwimmbecken wird befüllt mit 600l pro Minute.
   c) Von der Menge 10g eines radioaktiven Stoffes zerfallen stündlich 8,5%.

2. Skizziere die folgenden Funktionsgraphen:
   a) $f(x) = 2 \cdot 0{,}8^x$
   b) $g(x) = 2x + 1{,}5$
   c) $h(x) = -0{,}5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^x$

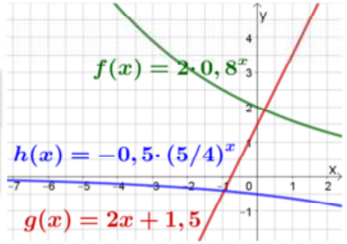
3. Löse die Exponentialgleichungen.
   a) $5 \cdot 4^x + 6 = 17$
   b) $3^x \cdot 6 \cdot 2^{-x} = 120$
   c) $2000 = 5 \cdot 2^{2t-1}$

4. Die Gleichung $m(t) = 200mg \cdot 2{,}5^{-0{,}4t}$ beschreibt den Abbau eines Medikaments im Körper in Stunden. Ermittle, wann etwa die Hälfte des Medikaments abgebaut ist.

Lösungen

1. a) Exponentielles Wachstum, $f(x) = 5000 \cdot 1{,}03^x$
   b) Lineares Wachstum $f(x) = 600 \cdot x$
   c) Exponentielles Wachstum, $f(x) = 10 \cdot 0{,}915^x$

2. Lsg:



3. a) $x = \log_4 2{,}2 \approx 0{,}57$
   b) $x = \log_{1{,}5} 20 \approx 7{,}39$
   c) $t = \frac{\log_2 400 + 1}{2} \approx 4{,}82$

4. $100mg = 200mg \cdot 2{,}5^{-0{,}4t}$
   $t = \log_{2{,}5} 0{,}5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \approx 1{,}89$
   Nach knapp 1h 54min ist die Hälfte abgebaut.

Kapitel 2: Mehrstufige Zufallsexperimente und stochastische Simulationen

Wissen

Mehrstufige Zufallsexperimente und Pfadregeln:
Zufallsexperimente, bei denen man mehrere Teilexperimente unabhängig nacheinander durchgeführt werden, heißen **mehrstufig.**
- **1.Pfadregel:** Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ereignis gehört
- **2. Pfadregel:** Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist die Summe der Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

Aufgaben/Beispiele

1. Du ziehst aus einem Stapel aus 20 gut gemischten Karten (4 Farben) nacheinander zweimal ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Herzkarten gezogen werden.

2. Es werden fünf Würfel gleichzeitig geworfen. Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass …
   a) … genau eine 6 erscheint.
   b) … mindestens eine 6 erscheint.

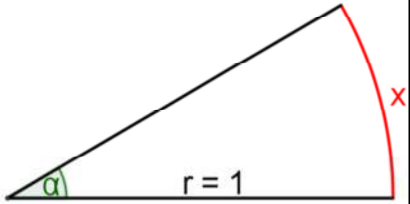
Lösungen

1. $\mathrm{P(zwei\ Herz)} = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = 5{,}26\%$

2. a) $\mathrm{P(eine6)} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} \approx 40{,}2\%$
   b) $\mathrm{P}(\geq \mathrm{eine6}) = 1 - \mathrm{P(keine6)} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776} \approx 59{,}8\%$

Kapitel 3: Sinus- und Kosinusfunktion

Bogenmaß
Die Größe eines Winkels eines α kann man im **Gradmaß** angeben oder im **Bogenmaß** mithilfe der Bogenlänge x am Einheitskreis. Es gilt:



$x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$ bzw. $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$

Beispiel: $\alpha = 180° \rightarrow x = \frac{180°}{180°} \cdot \pi = \pi$ (Was auch Sinn macht, denn die Bogenlänge eines Halbkreises mit Radius 1 hat die Länge π)

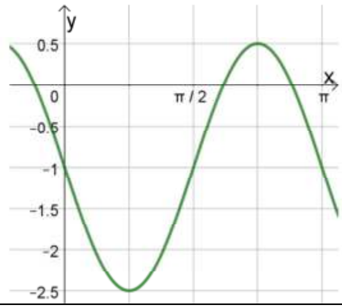
Sinus- und Kosinusfunktion
Die Funktionen mit der Funktionsgleichung …

… $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$ ($x \in$ R) heißt **Sinusfunktion**.
… $\boldsymbol{g(x) = \cos(x)}$ ($x \in$ R) heißt **Kosinusfunktion**.
Die Funktionen sind periodisch mit der Periodenlänge 2π.

Allgemeine Sinusfunktion
Graphen von **Sinusfunktionen der Form** $\boldsymbol{h(x) = a \cdot \sin[b(x+c)] + d}$ ergeben sich aus der Sinusfunktion nach folgendem Muster:

- **Streckung in y-Richtung** mit dem Faktor $|a|$, d. h. Amplitude a
- **Streckung in x-Richtung** mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$, d. h. Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$
- **Verschiebung in y-Richtung** um d
- **Verschiebung in x-Richtung** um –c

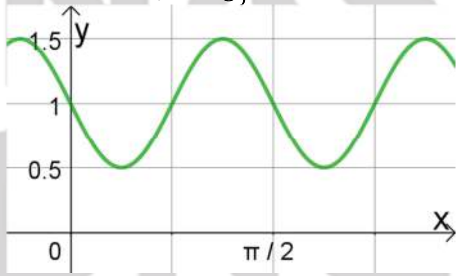
Beispiel: $\boldsymbol{f(x) = 1,5 \cdot \sin\left[2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1}$
Amplitude 1,5
Periodenlänge $p = \pi$
Verschiebung in y-Richtung um 1 nach unten
Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts
Funktionsgraph für $x \in [0;\ \pi]$



1. Rechne ins Grad- bzw. Bogenmaß um.
   a) $x = \frac{5}{4}\pi$
   b) $\alpha = 200°$
   c) $x = -\frac{8\pi}{3}$

2. Bestimme alle reellen Zahlen $x \in [0; 2\pi]$ für die gilt:
   a) $\sin(x) = 0$
   b) $\cos(x) = -0{,}5$
   c) $\sin(x) = 0{,}7$

3. Bestimme einen Funktionsterm zum abgebildeten Graphen g_f.



4. Die Wassertiefe bei der Einfahrt in einen Hafen variiert infolge der Gezeiten. Die Funktion f mit $f(t) = 1{,}6 \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}4}(t + 3{,}1)\right] + 3{,}6$ beschreibt die Wassertiefe in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden seit 0 Uhr.
   a) Gib die Periodenlänge p an und interpretiere p im Sachzusammenhang.
   b) Begründe, dass die Wassertiefe für $t = 0$ maximal ist.
   c) Ermittle, wann die Wassertiefe minimal ist.

1. a) $\alpha = 225°$
   b) $x = \frac{10}{9}\pi$
   c) $\alpha = -480°$

2. a) $x_1 = 0; x_2 = \pi; x_3 = 2\pi$
   b) $x_1 = \frac{2}{3}\pi;\ x_2 = \frac{4}{3}\pi$
   c) $x_1 \approx 0{,}78; x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}37$

3. Mögliche Lösung:
   Amplitude 0,5
   Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$
   Verschiebung in y-Richtung um 1 nach oben
   Verschiebung in x-Richtung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts
   $\boldsymbol{f(x) = 0,5 \cdot \sin\left[4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1}$
   Alternativ:
   $\boldsymbol{f(x) = 0,5 \cdot \sin(4x) + 1}$

4. a) $p = 12{,}4$. Nach 12,4h sind die Gezeiten einmal durchlaufen.
   b) $f(0) = 5{,}2$
   Das ist der maximale Wert, denn die Amplitude ist 1,6 und der Graph ist 3,6 nach oben verschoben.
   c) Die Wassertiefe ist nach der halben Periodenlänge minimal, also für $t = 6{,}2$, d. h. nach 6h und 12min, also um 6:12 Uhr.

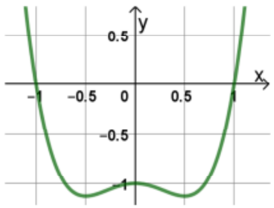
Kapitel 4: Ganzrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen
Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}$ heißt **ganzrationale Funktion**.

Eigenschaften ganzrationaler Funktionen:
- Die höchste vorkommende Potenz gibt den **Grad der Funktion** an.
- Das Verhalten des Graphen an den Nullstellen hängt von der **Vielfachheit der Nullstelle** ab:
  - Ungerade Vielfachheit → Vorzeichenwechsel (VZW)
  - Gerade Vielfachheit → Kein Vorzeichenwechsel
- Der **charakteristische Verlauf** der Funktionsgraphen im Unendlichen wird durch den Summanden $a_n x^n$ bestimmt. Dabei gilt:
  - n gerade und $a_n > 0$: „Von links oben nach rechts oben“
  - n gerade und $a_n < 0$: „Von links unten nach rechts unten“
  - n ungerade und $a_n > 0$: „Von links unten nach rechts
  - n ungerade und $a_n < 0$: „Von links oben nach rechts unten“
- **Symmetrie**
  - Achsensymmetrie zur y-Achse ↔ $f(x) = f(-x)$
  - Punktsymmetrie zum Ursprung ↔ $-f(x) = f(-x)$

Substitution
Bei ganzrationalen Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ kann man die Nullstellen mithilfe einer Substitution bestimmen.
Man substituiert $z = x^2$ und erhält $f(z) = a_4z^2 + a_2z + a_0$.
Mit der Lösungsformel $\boldsymbol{z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ erhält man $\boldsymbol{z_1}$ und $\boldsymbol{z_2}$.
Zuletzt muss wieder rücksubstituiert werden: $\boldsymbol{x_{1,2} = \pm\sqrt{z}}$.

Beispiel: $\boldsymbol{f(x) = 2x^4 - x^2 - 1}$
Nullstellen: $f(z) = 2z^2 - z - 1$ → $z_1 = 1$ → $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$;
$z_2 = -0{,}5$ liefert keine weiteren Nullstellen
Zwei einfache Nullstellen bei ±1, d.h. mit VZW
Schnittpunkt y-Achse: $f(0) = -1$ → $S_y(0|-1)$
Grobverlauf: „Von links oben nach rechts oben“
Symmetrie: $f(-x) = 2\cdot(-x)^4 - (-x)^2 - 1 = f(x)$
Achsensymmetrie zur y-Achse



1. Bestimme das Verhalten von f für x → ±∞.
   a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$
   b) $f(x) = -x^2\cdot(x-3)$
   c) $f(x) = 0{,}5\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$

2. Berechne die Nullstellen der Funktion f und gib deren Vielfachheit an.
   a) $f(x) = x^2\cdot(x-4)$
   b) $g(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
   c) $h(x) = (x-1)^2\cdot(x^2-1)$

3. Untersuche die Funktionen auf Symmetrie.
   a) $f(x) = -2x^6 + 4x^2 - 6$
   b) $g(x) = x^7 - 2x^3 + 5x$

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}25(x-0{,}5)(x^2-4)(x-2)$.
   a) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
   b) Bestimme den charakteristischen Verlauf des Funktionsgraphen im Unendlichen.
   c) Skizziere den Funktionsgraphen.

5. Die Gewinnfunktion eines Unternehmens lässt sich durch $g(x) = 4{,}5x - 0{,}01(x^3 - 4x^2 - 75x)$ modellieren [x: Anzahl verkaufter Packungen in 100 Stück; g(x): Gewinn in 100€]
   a) Bestimme die Nullstellen und interpretiere diese im Sachzusammenhang.
   b) Erläutere, ob das Unternehmen einen Absatz von 30000 Packungen anstreben sollte.

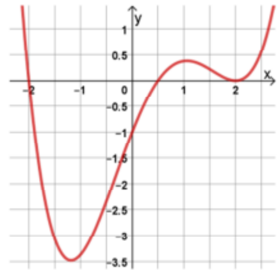
1.

	$x \to -\infty$	$x \to \infty$
a)	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$
b)	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
c)	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$

2. a) $x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_2 = 4$ (einfache Nullstelle)
   b) $x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 2; x_4 = 3$ (alle einfach)
   c) $x_1 = 1$ (dreifache Nullstelle); $x_2 = -1$ (einfache Nullstelle)

3. a) $f(x) = f(-x)$ Achsensymmetrie
   b) $f(-x) = -f(x)$ Punktsymmetrie

4. a) $S_Y(0|-1)$; $N_1(-2|0)$; $N_2(0{,}5|0)$; $N_3(2|0)$ (doppelt)
   b) „Von links oben nach rechts oben“
   c) Graph:

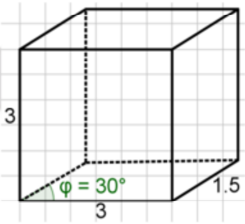


5. a) $N_1(-21|0)$; $N_2(0|0)$; $N_3(25|0)$
   N_1 macht keinen Sinn; bei null Verkäufen ist der Gewinn 0, ebenso bei 25000 Verkäufen.
   b) Das sollten sie nicht anstreben, denn bei $x = 300$ wäre der Gewinn negativ.

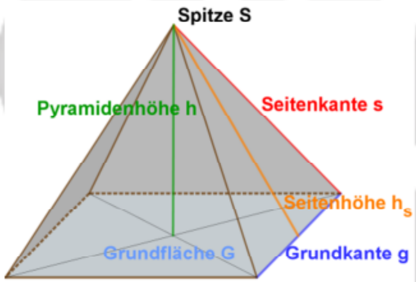
Kapitel 5: Raumgeometrie

Schrägbilder
Die Zeichnung eines Körpers nennt man Schrägbild.
Im Schrägbild erscheinen
- zur Zeichenebene parallele Strecken in wahrer Länge und Richtung (parallele Strecken bleiben immer parallel!).
- zur Zeichenebene senkrechte Strecken unter einem **Verzerrungswinkel φ** und im gleichen Verhältnis um einen **Verkürzungsfaktor k** verkürzt. Es gilt: $k = \frac{a_{verkürzt}}{a_{original}}$.

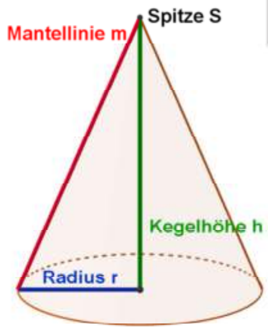
Beispiel eines Würfel-Schrägbildes mit Verzerrungswinkel $\varphi = 30°$ und Verkürzungsfaktor $k = 0{,}5$.



Pyramide
Das Körpernetz einer Pyramide besteht aus einem n-Eck (Grundfläche G) und n Dreiecken (Mantelfläche M).
Oberflächeninhalt: $O = G + M$
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Kegel
Das Körpernetz eines Kegels besteht aus einem Kreis (Grundfläche G) und einem Kreissektor (Mantelfläche). Der Mittelpunktswinkel α der Mantelfläche berechnet sich mit $\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360°$.
Mantelflächeninhalt: $M = \frac{\alpha}{360°} \cdot m^2\pi = r \cdot m \cdot \pi$
Oberflächeninhalt: $O = G + M = r^2\pi + rm\pi$
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot h$



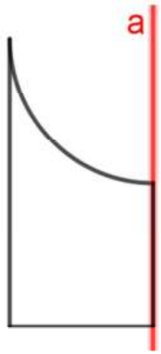
Kugel
Für eine Kugel mit dem Radius r gilt:
Oberflächeninhalt: $O = 4r^2\pi$
Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot r^3\pi$

1. Gegeben ist eine gerade, quadratische Pyramide mit Grundkante g = 6,5cm und der Höhe $h = 8$cm.
   a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit Verzerrungswinkel $\varphi = 60°$ und Verkürzungsfaktor $k = 0{,}7$.
   b) Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt.

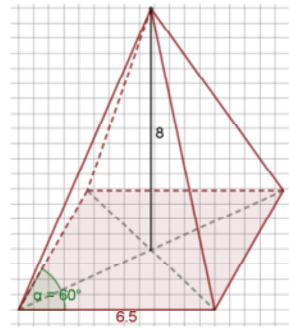
2. Befördert man 2m³ Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92cm Höhe.
   a) Ermittle den Radius der Grundfläche dieses kegelförmigen Sandhaufens.
   b) Berechne die Länge der Mantellinie m.
   c) Berechne die Größe des Mittelpunktswinkels der Mantelfläche im Körpernetz.

3. Ein kegelförmiges Sektglas mit dem Radius $r = 5cm$ und der Höhe $h = 10cm$ ist bis zur halben Höhe gefüllt. Ermittle, zu wieviel Prozent des gesamten Volumens das Glas damit gefüllt ist.

4. Ein Rechteck (Seitenlängen 8cm und 4cm), aus dem ein Viertelkreis herausgeschnitten ist, wird um die Achse a gedreht (siehe Bild).
   a) Erkläre, welche Form der Rotationskörper hat.
   b) Berechne seine Masse, wenn dieser aus Kunststoff (Dichte $\rho = 1500\,\frac{kg}{m^3}$) besteht.



1. a) Schrägbild: $0{,}7 \cdot 6{,}5 = 4{,}55$



   b) $V = \frac{1}{3} G \cdot h = 112{,}7 cm^3$
   $h_s = \sqrt{\left(\frac{1}{2}g\right)^2 + h^2} \approx 8{,}63cm$
   $O = G + M = g^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h_s$
   $\approx 154{,}5cm^2$

2. a) $r = \left(\sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}}\right) \approx 1{,}44m$
   b) $m = \sqrt{h^2 + r^2} \approx 1{,}71m$
   c) $\alpha = \frac{r}{m} \cdot 360° \approx 303°$

3. $V_{ganz} = \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{250}{3} \pi cm^3$
   $V_{halb} = \frac{1}{3} r_{halb}^2 \cdot \pi \cdot h_{halb} = \frac{125}{12} \pi$
   Anteil: $\frac{V_{halb}}{V_{ganz}} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$

4. a) Der Rotationskörper ist ein Zylinder, aus dem eine Halbkugel herausgeschnitten ist.
   b) $V = V_{Zyl} - V_{Halbkugel}$
   $= \frac{256}{3} \pi\ cm^3 \approx 268{,}08 cm^3$
   $m = \frac{V}{\rho} = \frac{256}{3} \pi\ cm^3 \cdot 1{,}5 \frac{g}{cm^3}$
   $= 128\pi\ g \approx 402g$