

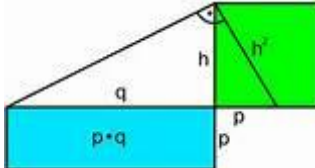
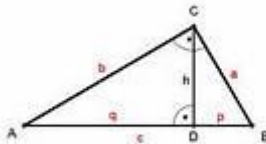


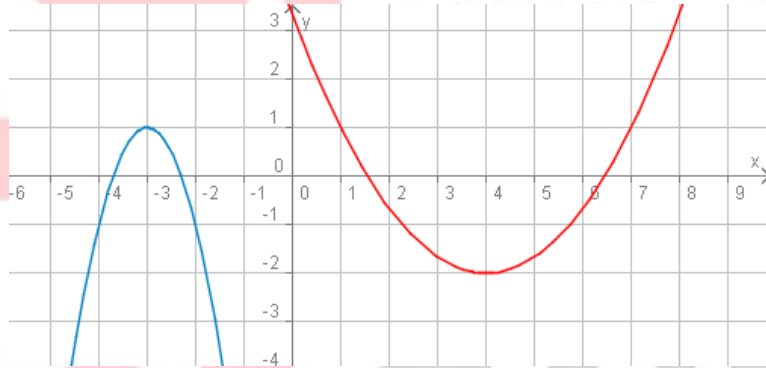
Grundwissen Mathematik 9 . Klasse



Wissen	Aufgaben/Beispiele	Lösungen
<p>Quadratwurzeln: \sqrt{a}, $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. D.h.: \sqrt{a} ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.</p> <p>Irrationale Zahlen: Es gibt Zahlen $a > 0$, für die \sqrt{a} keine rationale Zahl ist. Irrationale Zahlen lassen sich als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche schreiben.</p> <p>Reelle Zahlen \mathbb{R}: Rationale und irrationale Zahlen ergeben zusammen die Menge der Reellen Zahlen \mathbb{R}.</p>	<p>1. Berechne:</p> <p>a) $\sqrt{1,44}$ b) $\sqrt{\frac{49}{64}}$</p> <p>c) $\sqrt{(-0,6)^2}$ d) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$</p> <p>2. Ergänze den Satzbeginn durch „Jede“, „Manche“ oder „Keine“. Gib jeweils ein Beispiel an:</p> <p>a) ... irrationale Zahl ist eine reelle Zahl. b) ... reelle Zahl(en) ist eine (sind) irrationale Zahl(en).</p>	<p>1.a) 1,2 b) $\frac{7}{8}$ c) $\sqrt{0,6^2} = 0,6$ d) $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$</p> <p>2.a) „Jede“ z.B. $\sqrt{3}$ b) „Manche“ z.B. $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{3}$ ist irrational, aber $-4 \in \mathbb{R}$ aber -4 ist nicht irrational.</p>
<p>Rechnen mit Quadratwurzeln: → Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{a^2} = a$</p> <p>→ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ „Multiplikationsregel“</p> <p>→ $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ „Divisionsregel“</p> <p>Aber: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$</p>	<p>1. Ziehe teilweise die Wurzel:</p> <p>a) $\sqrt{147}$ b) $\sqrt{25d^3}$</p> <p>2. Vereinfache (ohne TR):</p> <p>a) $6\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{9a^5} - \sqrt{a^3}$</p>	<p>1.a) $= \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ b) $= \sqrt{25d^2 \cdot d} = 5 \cdot d \sqrt{d}$</p> <p>2.a) $= \sqrt{5} \cdot (6 - 1 + 2) = 7\sqrt{5}$ b) $= \sqrt{9a^4 \cdot a} - \sqrt{a^2 \cdot a} = 3a^2\sqrt{a} - a \sqrt{a}$</p>
<p>Binomische Formeln:</p> <p>→ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. binomische Formel</p> <p>→ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2. binomische Formel</p> <p>→ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 3. binomische Formel</p>	<p>1. Schreibe als Produkt:</p> <p>a) $100x^2 - 140x + 49$ b) $3a^2 - 30a + 75$</p> <p>2. Ergänze zu einer binomischen Formel:</p> <p>a) $0,16b^2 - \Delta + \nabla = (0,4b - 6c)^2$ b) $\frac{1}{16}r^4 + \Delta + 2 = (\Delta \diamond \nabla)^2$</p> <p>3. Mache den Nenner rational: $\frac{y-6}{\sqrt{y}+\sqrt{6}}$, ($y \geq 0$)</p>	<p>1.a) $= (10x)^2 - 2 \cdot 10x \cdot 7 + 7^2 = (10x - 7)^2$ b) $= 3(a^2 - 10a + 25) = 3(a - 5)^2$</p> <p>2.a) $= 0,16b^2 - 4,8bc + 36c^2 = (0,4b - 6c)^2$ b) $= \frac{1}{16}r^4 + \frac{1}{2}\sqrt{2}r^2 + 2 = \left(\frac{1}{4}r^2 + \sqrt{2}\right)^2$</p> <p>3. $= \frac{(y-6)(\sqrt{y}-\sqrt{6})}{(\sqrt{y}+\sqrt{6})(\sqrt{y}-\sqrt{6})} = \frac{(y-6)(\sqrt{y}-\sqrt{6})}{(y-6)} = \sqrt{y} - \sqrt{6}$</p>

<p>n-te Wurzeln: Für $a \geq 0$ versteht man unter $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$; ($n \in \mathbb{N}$)</p> <p>Schreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$</p> <p>Potenzen mit rationalen Exponenten: Für $a \geq 0$ gilt:</p> $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p; (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ <p>Rechengesetze: Gleiche Basis Gleiche Exponenten</p> $a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ $a^r : a^s = a^{r-s} \qquad a^r : b^r = (a : b)^r$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad (a, b \in \mathbb{Q}^+, r, s \in \mathbb{Q})$	<p>1. Vereinfache und gib das Ergebnis als Wurzel an:</p> <p>a) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3}$</p> <p>b) $\sqrt[4]{2^9} : \sqrt{2^7}$</p> <p>c) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}$</p> <p>2. Vereinfache:</p> $2 \cdot \sqrt[3]{16} + 5 \cdot \sqrt[3]{250}$	<p>1.a) $= 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 3^{\frac{9}{20}} = \sqrt[20]{3^9}$</p> <p>b) $= 2^{\frac{9}{4}} : 2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{9}{4} - \frac{7}{2}} = 2^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}$</p> <p>c) $= (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{5}$</p> <p>2. $= 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 8} + 5 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 125} =$ $= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} =$ $= \sqrt[3]{2} \cdot (4 + 25) = \sqrt[3]{2} \cdot 29$</p>
<p>Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$</p> $b^2 = c \cdot q$ 	<p>1. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC hat die Hypotenusenabschnitte $p = 3\text{cm}$ und $q = 7\text{cm}$. Berechne alle Seitenlängen sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.</p> <p>2. Elfmeter: Thomas knallt den Ball in einer Höhe von $1,50\text{m}$ an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei (geradlinige Flugbahn vorausgesetzt) zurück? Das Tor ist $7,32\text{m}$ breit und $2,44\text{m}$ hoch.</p>	<p>1. $c = p + q = 10\text{cm}$</p> $a^2 = c \cdot p \Rightarrow a = \sqrt{10\text{cm} \cdot 3\text{cm}} = 5,5\text{cm}$ $b = \sqrt{c \cdot q} = 8,4\text{cm}$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 23,1\text{cm}^2$ <p>2. $c = \sqrt{(11\text{m})^2 + (0,5 \cdot 7,32\text{m})^2} = 11,59\text{m}$</p> $s = \sqrt{c^2 + h^2} = 11,69\text{m}$ 
<p>Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$</p> 	<p>Im unten abgebildeten Dreieck (nicht maßstabs-getreu) ist $h = 6,0\text{cm}$ und $q = 18,0\text{cm}$. Berechne die Seitenlängen a, b und c.</p> 	$h^2 = p \cdot q \Rightarrow p = \frac{h^2}{q} = 2,0\text{cm}$ $c = p + q = 20,0\text{cm}$ $a^2 = c \cdot p = 40,0\text{cm}^2 \Rightarrow a = 6,3\text{cm}$ $b^2 = c \cdot q = 360\text{cm}^2 \Rightarrow b = 19,0\text{cm}$

Quadratische Funktionen: Eine Funktion der Form $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) heißt quadratische Funktion. Der Graph einer quadratischen Fkt. heißt **Parabel**. Der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen heißt **Scheitel**.

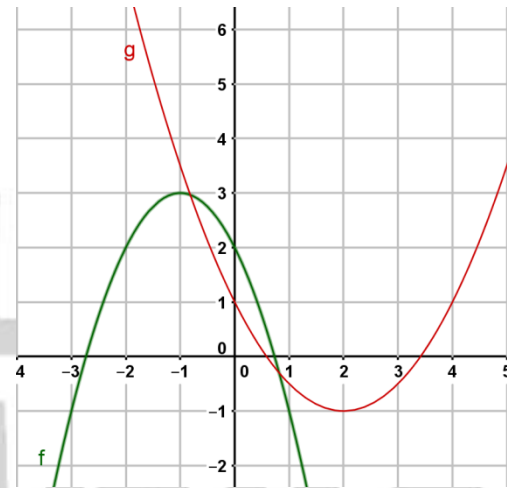


Scheitelpunktsform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$
 Der Graph von f ist eine Parabel mit dem **Scheitel $S(d/e)$** und dem **Formfaktor a** .
 $a > 0 \Rightarrow$ **Parabel nach oben geöffnet**
 $a < 0 \Rightarrow$ **Parabel nach unten geöffnet**
 $|a| > 1 \Rightarrow$ **Parabel ist enger als die Normalparabel**
 $|a| < 1 \Rightarrow$ **Parabel ist weiter als die Normalparabel**

Quadratische Gleichungen: Eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ hat die Lösungen $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Der Term $D = b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante**. Es gilt:
 $D = 0 \Rightarrow$ **Genau eine Lösung**; $D > 0 \Rightarrow$ **Zwei Lösungen**
 $D < 0 \Rightarrow$ **Keine Lösung**

1. Gib zu den abgebildeten Parabeln jeweils die Scheitelpunktsform an:



2. Beschreibe den Graphen der Funktion $f: x \rightarrow -3x^2 - 24x - 50$ möglichst genau, indem du den Funktionsterm auf die Scheitelpunktsform bringst.

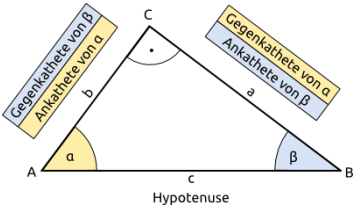
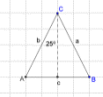
1. $f: y = -(x + 1)^2 + 3$
 $g: y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$

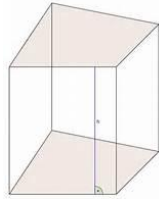
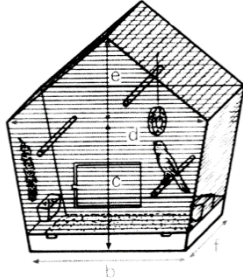
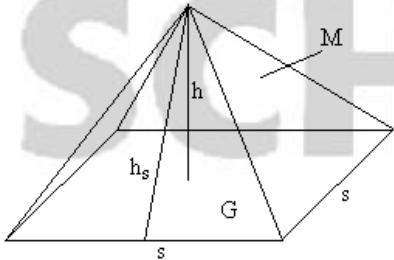
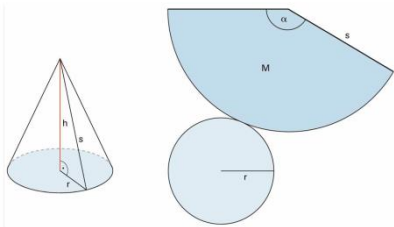
2. $f(x) = -3(x^2 + 8x)^2 - 50 = =$
 $-3(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2) - 50 = =$
 $-3(x + 4)^2 + 3 \cdot 16 - 50 = =$
 $= -3(x + 4)^2 - 2$
 G_f ist eine nach unten geöffnete Parabel, die enger als die Normalparabel ist. Ihr Scheitel liegt bei $S(-4 / -2)$.

Bestimme die Anzahl der Lösungen sowie, soweit vorhanden die Lösungszahlen:

- a) $2x^2 + 8x - 42 = 0$;
 b) $-x^2 + 6x - 9 = 0$;
 c) $3x^2 - 9x + 24 = 0$;

- a) $D = 20 \Rightarrow 2$ Lösungen
 $x_1 = -7$; $x_2 = 3$
 b) $D = \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)} = 0 \Rightarrow$
 Eine Lösung
 $x = 3$
 c) $D = \sqrt{-207} \Rightarrow$ Keine Lösung
 -

<p>Anwendungsaufgaben zu den Quadratfunktionen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Wähle ein, für die Situation möglichst geschickt gewähltes Koordinatensystem - Stelle darin die Gleichung der Parabel auf - Je nach Fragestellung ist z.B. der Scheitel oder Nullstellen gesucht <p>Schnittprobleme:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen werden bestimmt, indem man die Funktionsterme gleichsetzt 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bei einem Schülerwettbewerb im Kugelstoßen wird die Kugel im Punkt A aus einer Höhe von 2m schräg nach oben gestoßen. Ihre Flugbahn ist parabelförmig. Ihren höchsten Punkt H hat die Parabel in einer Höhe von 4,5m. H liegt in waagrechter Entfernung 5m von A entfernt. Welche Weite erreicht der Stoß? 2. Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte von $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -2x + t$ in Abhängigkeit vom Parameter t. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Parabelpunkte</i> $A(0/2), H(5/4,5)$ <i>H-Scheitel</i> <i>Beachte: Auch B(10/2) liegt auf</i> $G_f. f(x) = -0,1x^2 + x + 2$ <i>Nullstelle von f: x = 11,708(m)</i> 2. <i>Ansatz:</i> $2x^2 - 4x + 1 = -2x + t;$ $2x^2 - 2x + (1 - t) = 0;$ <i>Diskriminante: D = 8t - 4</i> $t > \frac{1}{2} \Rightarrow$ <i>Zwei Schnittp.</i> $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$ <i>Ein Berührp.</i> $t < \frac{1}{2} \Rightarrow$ <i>Kein Schnittp.</i>
<p>Mehrstufige Zufallsexperimente und Pfadregeln:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Zufallsexperimente, bei denen man mehrere Teilerperimente unabhängig nacheinander durchgeführt werden, heißen mehrstufig. - 1.Pfadregel: Die Ws. eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu diesem Ereignis gehört - 2.Pfadregel: Die Ws. eines Ereignisses ist gleich der Summe der Pfadws., die zu diesem Ereignis gehören. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Du ziehst aus einem Stapel aus 20 gut gemischten Karten (4 Farben) nacheinander zweimal ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ziehst du zwei Herzkarten? 2. Es werden zwei gezinkte Münzen mit $p(\text{Zahl}) = 0,6$ nacheinander geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen zwei verschiedene Seiten der Münze? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>(1.Pfadregel)</i> $P(\text{zwei Herzk.}) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = 5,26\%$ 2. <i>Zum Ereignis gehören zwei verschiedene Pfade im Baumdiagramm:</i> $P(\text{versch. Lagen}) = P(WZ, ZW)$ $= P(WZ) + P(ZW) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 48\%$
<p>Trigonometrie / Betrachtungen am rechtwinkligen Dreieck:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ - $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ - $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Berechne die Länge der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel 4,0 cm lang sind, und bei dem der Winkel an der Spitze 50° beträgt. 2. Ein 35m hoher Turm wirft mittags einen 18m langen Schatten auf den Boden. Unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\sin 25^\circ = \frac{1}{2} \frac{c}{b}$ $c = 2 \cdot b \cdot \sin 25^\circ = 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot \sin 25^\circ = 3,4 \text{ cm}$ 2. $\tan \alpha = \frac{35 \text{ m}}{18 \text{ m}}$ $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{35}{18} \right) = 62,8^\circ$ 

<p>Berechnungen an Körpern:</p> <p>1. Volumen und Oberfläche von Prismen</p> $V = G \cdot h$ $O = 2 \cdot G + M$ <p style="text-align: right;"><i>Volumen</i> <i>Oberfläche</i> <i>M - Mantelfläche</i></p>  <p>2. Volumen und Oberfläche von Zylindern</p> $V = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$ $O = 2 \cdot G + M = 2r^2 \pi + 2r \pi \cdot h$ <p style="text-align: right;"><i>Volumen</i> <i>Oberfläche</i></p>	<p>1. Vogelkäfing Der in der Abbildung dargestellte Vogelkäfing hat die Maße $b = 35\text{cm}$, $c = 29\text{cm}$, $d = 45\text{cm}$, $e = 19\text{cm}$ und $f = 23\text{cm}$. Berechne, welchen Raum der Vogel in dem Käfig hat.</p>  <p>2. Eine Rolle Eisendraht ($\rho = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) hat eine Masse von 13,5kg. Wie lange ist der Draht, wenn sein Durchmesser 2,4mm beträgt?</p>	<p>1. $V = G \cdot h =$ $= \left[\frac{1}{2} \cdot d \cdot e + \frac{1}{2} \cdot (b + d) \cdot c \right] \cdot f$ $= 36512,5\text{cm}^3$ $= 36,5\text{l}$</p> <p>2. $m = \rho \cdot V$ $m = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot l$ <i>l - Drahtlänge</i> $l = \frac{m}{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}$ $= \frac{13500\text{g}}{7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot (0,12\text{cm})^2 \cdot \pi} =$ $= 380\text{m}$</p>
<p>3. Volumen und Oberfläche von Pyramiden Eine Pyramide vom Grundflächeninhalt G und einer Höhe h hat das Volumen</p> $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 	<p>3. Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $s = 6,5\text{cm}$ und der Höhe $h = 12\text{cm}$.</p>	<p>3. Skizziere ein Schrägbild mit Stützdreieck $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot h =$ 169cm^3 $O = G + M =$ $= s^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} s \cdot h_{\Delta}$ mit $h_{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s\right)^2 + h^2} =$ $12,4\text{cm}$; $O = 203,4\text{cm}^2$</p>
<p>4. Volumen und Oberfläche von Kegeln</p> $V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$ $M = \pi r \cdot s$ $O = G + M = r^2 \pi + \pi r \cdot s$  <p style="text-align: center;"><small>gerader Kreiskegel</small></p>	<p>4. Befördert man 2m^3 Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92cm Höhe.</p> <p>a) Welchen Durchmesser hat der Kegel? b) Berechne die Mantellinienlänge s.</p>	<p>4. a) $d = 2r = 2 \sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot h}} = 2,88\text{m}$ b) $s = \sqrt{h^2 + r^2} = 1,71\text{m}$</p>