Grundwissen Mathematik 8. Klasse

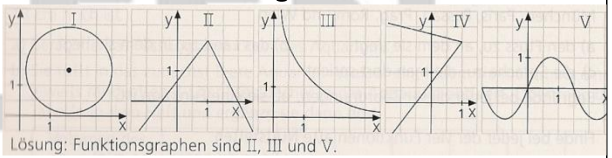
<table>
<tr><th>Wissen</th><th>Aufgaben/Beispiele</th><th>Lösungen</th></tr>
<tr>
<td>

Funktionale Zusammenhänge
Eindeutige Zuordnungen nennt man in der Mathematik <u>Funktionen</u>.
Bei einer Funktion $f: x \longmapsto y$ wird jedem Wert x genau ein Wert y zugeordnet.

<u>Wichtige Fachbegriffe</u>: Variable, Zuordnungsvorschrift, Funktionsterm, Funktionsgleichung, Definitionsmenge, Wertemenge, Nullstellen.

</td>
<td>

1. Begründe welche der folgenden Graphen zu einer Funktion gehören.



2. Berechne die Nullstelle der Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = 5 - 0{,}25x$.

</td>
<td>

1. Funktionen: II; III; V
Keine Funktionen: I; IV

2. $f(x) = 0 \iff 5 - 0{,}25x = 0$
$x = 40$;

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Lineare Funktionen und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist, heißt <u>lineare Funktion</u>. Ihre Zuordnungsvorschrift ist von der Art $f: x \longmapsto m \cdot x + t$.

Geometrische Bedeutung der Parameter m und t:

t: y-Achsenabschnitt des Graphen; m: Steigung der Geraden

Gleichungen (oder Äquivalente) der Form $ax + by + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{Q};\ b \neq 0)$ nennt man <u>lineare Gleichungen</u>.

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS). Ein Zahlenpaar (x/y) ist genau dann Lösung des LGS, wenn es beim Einsetzten beide Gleichungen erfüllen.

(Rechnerische Verfahren zum Lösen von LGS'en: Gleichsetzungsverfahren, Einsetzverfahren, <u>Additionsverfahren</u>)

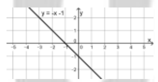
</td>
<td>

1. Gegeben ist eine lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x - 1$.
   a) Zeichne den Graphen von f in ein KSY und zeige, dass P(-93 , 92) auf dem Graphen liegt.
   b) Beschreibe einen Weg, wie du die Gleichung einer weiteren linearen Funktion g findest, du ebenfalls durch P geht.
   c) Gegeben sind lineare Funktionen mit $g_m(x) = mx + 2$. Unter welchen Bedingungen für m schneiden sich die Graphen von f und g_m im II. Quadranten.

2. Löse das folgende lineare Gleichungssystem:
   I: 2x+5y=13
   II: 3x-3,5y=8,5

</td>
<td>

1 a)



$f(-93) = -(-93) - 1 = 92$
$\Longrightarrow P \epsilon G_f$

b) Sei Steigung m=2; Mit $P \epsilon G_g$ *folgt:*
$g(-93) = 92 \iff 2 \cdot (-93) + t = 92$
$t = 278$;
$g(x) = 2x + 278$

c) $m \in]\,2\,;\ -1\,[$

2. x=4 und y=1 $\Longrightarrow$ *(4/1) ist Lsg. des LGS*

</td>
</tr>
</table>

Gebrochen-rationale Funktionen, Bruchterme und -gleichungen

Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ("x im Nenner") ist, nennt man gebrochen rationale Funktionen.

Jede gebrochen rationale Funktion (andere erst ab Jgst. 11) hat

- an jeder Definitionslücke eine senkrechte Asymptote
- für $|x| \to \infty$ eine waagrechte Asymptote

Beim Rechnen mit Bruchtermen geht man wie beim Rechnen mit Brüchen vor (Erweitern/Kürzen, Addieren/Subtrahieren, Multiplizieren/Dividieren)

Gleichungen, in denen Variablen ("Unbekannte") in mindestens einem der Nenner auftreten, bezeichnet man als Bruchgleichungen.

1. Entscheide anhand des Funktionsterms, welche Asymptoten der jeweilige Graph besitzt und skizziere seinen ungefähren Verlauf.

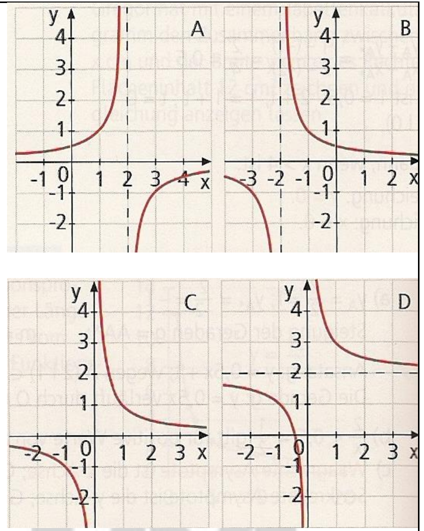
   $f(x) = \frac{1}{x}$; (Graph C) $\qquad g(x) = \frac{1}{x+2}$; (Graph B)

   $h(x) = \frac{1}{2-x}$; (Graph A) $\qquad l(x) = \frac{1}{x} + 2$ (Graph D)

2. Löse die folgende Bruchgleichung (rechnerisch oder graphisch).

   $\frac{2}{x} = \frac{4}{3-x}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{Q}\{0; 3\}$

3. Löse die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ nach jeder Variablen auf.



2. $\mathbb{L} = \{1\}$

3. $h = \frac{2A}{a+c}$; $a = \frac{2A}{h} - c$; $c = \frac{2A}{h} - a$

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Eine Potenz besteht aus einer **Basis a** und einem Exponenten n.

$n \in \mathbb{N}$			$n = 0$
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}$	und	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\boldsymbol{a^0 = 1}$

Sehr große oder kleine Zahlen werden oft mit Hilfe von Zehnerpotenzen dargestellt (Gleitkommadarstellung).

Potenzgesetzte: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$

1. Schreibe als Dezimalzahl

   $7 \cdot 10^6 =$; $\quad 4{,}19 \cdot 10^{-7} =$

2. Berechne ohne Taschenrechner

   $(-5)^3 =$; $\quad -5^4 =$; $\quad (-5)^4 =$

   $5^{-3} =$; $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

3. Vereinfache soweit wie möglich

   $a^{-7} \cdot a^4 =$; $\quad x^{-11} \cdot x^{-5} =$; $\quad a^6 : a^{-4} =$

1. $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$

$4{,}19 \cdot 10^{-7} =$ *0,000 000 419*

2. $(-5)^3 = -125$;

$-5^4 = -625$; $\quad (-5)^4 = 625$

$5^{-3} = \frac{1}{125}$; $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$

3. $a^{-7} \cdot a^4 = a^{-3}$;

$x^{-11} \cdot x^{-5} = x^{-16}$;

$a^6 : a^{-4} = a^{10}$

Kreise

Der Umfang eines Kreises ist direkt proportional zu seinem Durchmesser.

$\Longrightarrow$ Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14\ldots$

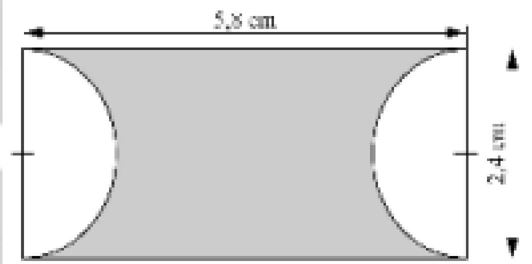
Umfang U eines Kreises: $U_k = 2r \cdot \pi$

Flächeninhalt A eines Kreises: $A_k = r^2 \cdot \pi$

1. Ermittle die fehlenden Größen in der Tabelle.

Radius	4,5cm		
Durchmesser		40,0cm	
Umfang			92,4cm

2. Berechne den Umfang und Flächeninhalt der grauen Figur.



1.

4,5 cm	*20 cm*	$\approx 14{,}7\ cm$
9 cm	*40 cm*	$\approx 29{,}4\ cm$
28,26 cm	*125,6 cm*	*92,4 cm*

2. $U = 2 \cdot 5{,}8 + 2 \cdot \frac{2{,}4}{2} \cdot 3{,}14 = \ldots$

$\approx 19{,}14\ [cm]$

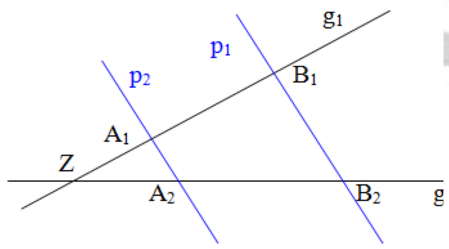
$A = 5{,}8 \cdot 2{,}4 - \left(\frac{2{,}4}{2}\right)^2 \cdot 3{,}14 = ..$

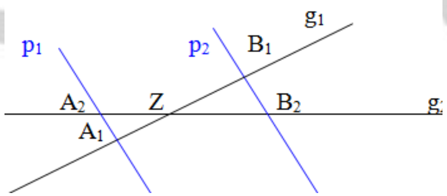
$\approx 9{,}40\ [cm^2]$

Strahlensätze und Ähnlichkeit

Grundvoraussetzung für die Anwendung der Strahlensätze:

Eine Geradenkreuzung wird von einem Parallelenpaar geschnitten, das den Kreuzungspunkt nicht enthält:

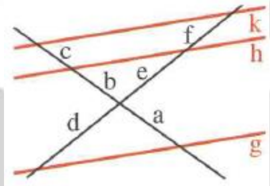




Ist dies gegeben, so gilt:

1. Die Länge zweier Strecken auf der einen Geraden verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Strecken auf der anderen Geraden.
2. Die Längen der ausgeschnittenen Parallelenstrecken verhalten sich zueinander wie die Entfernungen ihrer entsprechenden Endpunkte vom Kreuzungspunkt.

1.

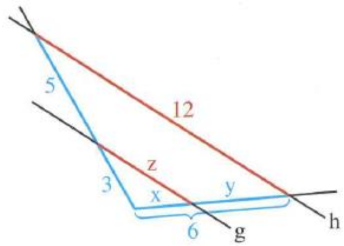


In der Zeichnung ist g parallel zu h und k. Ergänze die folgenden Gleichungen.

$\frac{b}{c} = \frac{\;}{\;}$; $\frac{d}{e} = \frac{\;}{\;}$;

$\frac{f}{e} = \frac{\;}{\;}$; $\frac{e+f}{e} = \frac{\;}{\;}$;

2.



In der Zeichnung ist g parallel zu h. Berechne die Längen von x, y und z.

1.

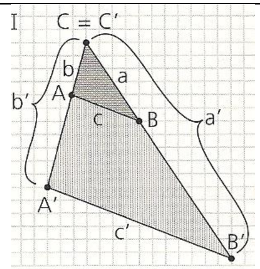
$\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$;

$\frac{f}{e} = \frac{c}{b}$; $\frac{e+f}{e} = \frac{b+c}{b}$;

2. $\frac{x}{6} = \frac{3}{3+5}$; $\frac{z}{12} = \frac{3}{3+5}$

x = 2,25 ; y = 3,75 ; z = 4,5

<table>
<tr>
<td>
Wird eine Figur im Maßstab k vergrößert bzw. verkleinert, so nennt man die Bildfigur F' und die Originalfigur F zueinander ähnlich ($F \sim F'$).

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
• im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (S:S:S - Satz)
• in zwei Winkeln übereinstimmen (WW - Satz)
</td>
<td>
3. 

Beschreibe die Eigenschaften der beiden ähnlichen Dreiecke ABC und A'B'C'.
</td>
<td>
• Die entsprechende Winkel sind gleich groß
• Die Längenverhältnisse einander entsprechedner Strecken sind stets gleich
• Sind die Seitenlängen der Bildfigur k-mal so lang wie die der Originalfigur, so ist der Flächeninhalt k²-mal so groß
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Laplace-Wahrscheinlichkeiten
Die Menge aller mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments bilden die <u>Ergebnismenge Ω</u> .
($|\Omega|$ = "Mächtigkeit von Omega"="Anzahl der Elemente")

Jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω nennt man EREIGNIS.
(Besondere Ereignisse: Gegenereignis, Sicheres Ereignis, Unmögliches Ereignis)

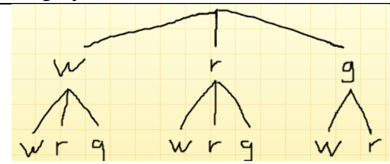
Unter der <u>Wahrscheinlichkeit P(A)</u> eines Ereignisses A versteht man den Grad der Sicherheit, mit der das Ereignis eintritt (vor Durchführung des Experiments!).

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißt <u>Laplace-Experiment</u>.

Hier gilt: $P(A) = \frac{Anzahl\ der\ für\ A\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Das Zählprinzip: Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl der möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten jeder Stufe miteinander multipliziert.
</td>
<td>
1. In einer Tüte sind 3 weiße, 2 rote und ein grünes Gummibärchen. Du holst nacheinander zwei Bärchen aus der Tüte.
a) Veranschauliche das Experiment mit Hilfe eines Baumdiagramms.
b) Gib die Ergebnismenge an. (Ω_1 mit beachten der Reihenfolge; Ω_2 ohne Beachtung der Reihenfolge
c) Verändere das Experiment so, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse:
a) Aus dem Wort "ZUFALLSEXPERIMENT" wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt.
A: Es handelt sich um ein "E".
B: Es handelt sich um einen Vokal.
b) Eine Lostrommel enthält 600 Lose. Zwei Drittel davon sind Nieten, 80% des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose ergeben Hauptgewinne.
A: Das gezogene Los ergibt einen Trostpreis.
B: Das gezogene Los ergibt keinen Hauptgewinn.

3. Dein Freund besitzt ein Zahlenschloss bestehend aus 4 Ziffern von 0 bis 9.
a) Wie viele unterschiedliche Kombinationen gibt es?
b) Du weißt, dass die erste Zahl eine 4 und die dritte eine 7 ist. Wie viele Möglichkeiten können es dann noch sein?
</td>
<td>


b) $|\Omega_1| = 8$; $|\Omega_2| = 5$
$\Omega_1 = \{(w|w); (w|r); (w|g); (r|w); (r|r); (r|g); (g|w); (g|r)\}$
$\Omega_2 = \{(w;w); (w;r); (w;g); (r;r); (r;g)\}$

Erklärung: $(w;r) = \{(w|r); (r|w)\}$

c) z.B. Von jeder Farbe sind gleich viele Gummibärchen in der Tüte und nach jedem ziehen, wird das Gummibärchen zurückgelegt.

2. a) $P(A) = \frac{3}{17} \approx 17{,}65\%$
$P(B) = \frac{6}{17} \approx 35{,}29\%$
b) 400 Nieten → 200 andere Lose
80% von 200 = 160
$P(A) = \frac{160}{600} = \frac{4}{15} \approx 26{,}67\%$
$P(B) = \frac{560}{600} = \frac{14}{15} \approx 93{,}33\%$

3. a) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$
b) $1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 = 100$
</td>
</tr>
</table>